Title	Coxeter Groupsに付随するWeighted Homogeneous PolynomialのMicrolocal Structure : with Appendix on GL(2) (微分方程式と超函数)
Author(s)	矢野, 環; 関口, 次郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1976), 281: 40-105
Issue Date	1976-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/106055
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
281巻 1976年 40-105

Coxeter Groups に付随する weighted homogeneous polynomial の microlocal structure

(with Appendix on $GL(2)$)

矢野 環 (京大理 D.C.)
関口 次郎 (〃)

Abstruct

有限 Coxeter System (W_ℓ, S) の fundamental anti-invariant J の2乗を、fundamental invariants の函数とみる: $f(x)=(J(\xi))^2$. f の複素中の微局所的構造は、S の部分集合が生成した、W_ℓ の部分群の共役類により特徴づけられる。本小文においては、その共役類、fundamental invariants、f を不変にする Lie 環 $\mathfrak{g}$ (i.e. $Xf \in \mathcal{O}f$) 等の構造を決定する。又、f^s の b 函数*は、(W_ℓ, S) の不変量 k_i により、$b(s)=\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{k=1}^{k_i-1}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{k}{k_i}\right)$ と与えられると予想される。Appendix において、$GL(2)$ の invariant に由来する、simple な多項式の可能性についての議論をなされる。

* cf [2]

§0. Introduction

(W_ℓ, S) を既約有限 Coxeter System (cf §1), $V^* = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}\xi_i$ をその標準表現空間の dual space, $\xi_1 \cdots \xi_\ell$ は orthonormal basis とする. 基本不変式 (homogeneous) を $x_1, \cdots, x_\ell$, $k_i = \deg_\xi x_i$, 基本反不変式を J とおく. J^2 は不変式故, $f_{W_\ell}(x) = (J(\xi))^2$ と表示される。このとき,

holonomic system $\mathcal{M}_\alpha \simeq \mathcal{D}[s]f^s / (s-\alpha)\mathcal{D}[s]f^s$ の (α: generic) holonomy diagram は, その Lagrangians が, (W_ℓ, S) の S の subset S' が生成した群 $W_{S'}$ の共役類と対応し, その order は S' の diagram の頂点の数であり, S'' が, S' から一個の元をはずしたものであるとき, 対応する Lagrangians は codimention 1 の交わりをもつ. さらに, それらの Lagrangians はすべて simple であり, order も S' の diagram より知れる.

f_{W_ℓ} の b 函数は (i.e. $P(s,x,D)f^{s+1} = b(s)f^{s}$ なる $b(s)$)

$$b_{W_\ell}(s) = \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{k=1}^{k_i-1}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{k}{k_i}\right)$$

と予想されている。

矢野は f_{A_ℓ} $2\le \ell\le 6$ について、それが simple であることを指摘し、佐藤は任意の f_{A_ℓ} について構造を決定した。矢野は任意の Coxeter Group に対して、すべての Lagrangians が simple となり、codim, order が決定され、交わりも知ることができることを示した (cf §2) 又、f_{W_ℓ} に関する micro local structure, f_{W_ℓ} を不変にする Lie 環について（基本不変式の決定も含む）、矢野－関口が構造をしらべた。（未決定のものもある。）特に F_4 については、関口によるところが多い。

A_ℓ, B_ℓ, D_ℓ について、f_{W_ℓ} は、いわゆる判別式に手を加えたものとなる。判別式は $GL(2)$ 不変であるが、

$(SL(5)\times GL(4);\ 日\otimes□)$ なる prehomogeneous vector space においては、そのある orbit への localization として、

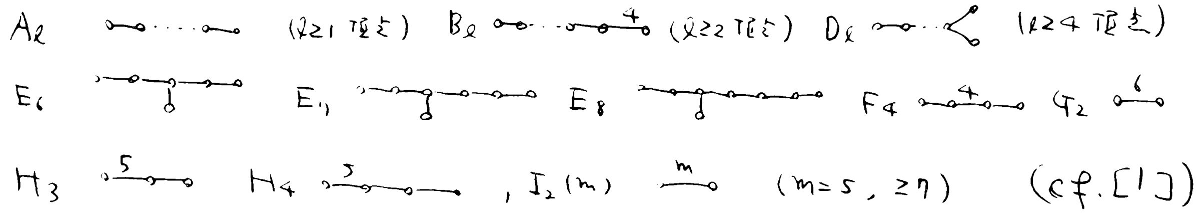
$GL(2)$ 不変な、判別式と同じ weight をもつ、simple な多項式があらわれる。その様な多項式として、どの様なものがありうるかという問題を佐藤が提出した。これについて、佐藤－矢野－関口は部分的結果を得た。これについて Appendix においてのべる。

§1. Coxeter System

Coxeter System (W_l, S) とは群 W_l と W_l の生成元の集合 S の pair であり, $S=\{s_1,\dots,s_l\}$ とするとき, 「$(s_is_j)^{m_{ij}}=1$, $m_{ii}=1$, $m_{ij}\geq 2$ $(i\neq j)$」が基本関係であることをいう。ここに $m_{ij}=\infty$ もゆるす. $\mathbb{R}^l$ の basis $\{e_1,\dots,e_l\}$ に対し $\sigma_i(e_j)=e_j+2\cos\frac{\pi}{m_{ij}}\cdot e_i$ と定めれば, $\sigma: W_l\to GL(\mathbb{R}^l)$ $s_i\mapsto\sigma_i$ は単射であり, W_l は $\sigma(W_l)$ と同一視される。(W_l, S) の graph とは, s_i に対応する l 個の頂点 $\underset{i}{\circ}$ $1\leq i\leq l$ と, i と j を $m_{ij}\geq 3$ のときにかぎり結ぶ線分 $\underset{i}{\circ}\overset{m_{ij}}{\text{—}}\underset{j}{\circ}$ とからなる。$m_{ij}=3$ のときは~~線分~~線上の m_{ij} をはぶく. グラフが連結のとき, (W_l, S) は既約という。

W_l が有限群となるためには, 行列 $\left(-\cos\frac{\pi}{m_{ij}}\right)_{ij}$ が正定値であることが必要かつ十分. このとき, $\mathbb{R}^l$ に $\langle e_i, e_j\rangle=-\cos\frac{\pi}{m_{ij}}$ により内積を入れれば, それについての正規直交座標をとることにより, $\sigma(W_l)\subset O(l)$ (直交群) とみなされる。以後我々は有限 Coxeter group のみをあつかう。 W_l は $O(l)$ の有限部分群で同一視し, σ_i と s_i を同一視する。 (W_l, S) は, S の分割 $S=\bigsqcup S_i$ があり, S_i の生成した W_l の部分群を W_{lS_i} とするとき, それが既約 Coxeter System (W_{lS_i}, S_i) であり, $W_l=\prod W_{lS_i}$, しかも W_{lS_i} の表現空間 V_i について, $\mathbb{R}^l=\bigoplus V_i$ となる。

Theorem (W, S) が既約有限 Coxeter system であることと、そのグラフが次のいずれかと同型であることは同値である。



(cf. [1])

以下一般に (W_ℓ, S) もしくは W_ℓ と記すときは、上のいずれかを示す。又、その同形により、W_ℓ は $O(E)$ ($O(E^*)$) の有限部分群と同一視し、s_i は対応する reflection σ_i を表わすとする。$c = s_1 \cdots s_\ell$ を Coxeter 変換とよび、c の order を h : Coxeter number という。(s_i の順序を変えた積は c と共役)

$\det(T - c) = \prod_j \left(T - \exp\frac{2\pi i\, m_j}{h}\right)$ $\quad 0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_\ell \leq h$ における $(m_1, \ldots, m_\ell)$ を W_ℓ の exponents という。$\sum m_i = \frac{1}{2}\ell h$, $1 = m_1 < m_2 \leq \cdots \leq m_{\ell-1} < m_\ell = h-1$ が知られている。

E の正規直交基底を内積 $\langle e_i, e_j \rangle = -\cos\frac{\pi}{m_{ij}}$ に応じてとり $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell$ とする。E の元を一般に $\sum \xi_i e_i$ とあらわせば、E^* は $\bigoplus \mathbb{R}\xi_i$ と同一視される。$S(E^*)$ を E^* の symmetric alg. (従って $\mathbb{R}[\xi_1, \ldots, \xi_\ell]$ と同一視) $R = S(E^*)^{W_\ell}$ を W_ℓ の作用による不変元のなす環とする。又、H を、W_ℓ の鏡映全体の集合とし、$g \in H$ のとき、g が不変にする超平面(鏡映面)の定義方程式を $e_g(\xi)$ と記す。

Theorem (1) $S(E^*)$ is a graded free R-module of rank $\# W_\ell$.

(2) There are homogeneous elements $x_1, \dots, x_\ell$ in R, such that

$R \simeq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_\ell]$ and $k_i = \deg_\xi x_i = m_i + 1$.

(3) $\prod k_i = \# W_\ell$, $\# H = \sum (k_i - 1) = \frac{1}{2} \ell h$

(4) $S(E^*) \ni z$ が、$\forall s \in S$ に対し、$s(z) = -z$ をみたすとき、反不変式という。$D = \prod_{g \in H} e_g(\xi)$ (これを基本反不変式という) とすれば、反不変式全体は RD に一致する。

(5) $\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right) = \lambda D$ $\lambda \neq 0$ (cf [1])

(4)より $\boxed{f(x) = D^2}$ は不変式で、(2)(3)より weighted homogeneous of type $(k_1, \dots, k_\ell; \ell h)$ である。これが考察の対象となる。

$k_1 = 2, 3 \le k_2$, $W_\ell \subset O(E^*)$ より、$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \dots + \xi_\ell^2)$ である。

次に、f を不変にする Lie 環を構成しよう。

$g_{ij}(x) = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}$ とおく。$W_\ell \subset O(E^*)$ より、これは W_ℓ-invariant である。そこで

$$X_i = \sum g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

と定義する。ξ 座標でいえば、$X_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ であり、これが W_ℓ-inv. であることから、上記のように x 座標で表示されていると言ってもよい。$X_i D = \sum \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial D}{\partial \xi_k}$ は反不変式であることがわかるので、(4)より $X_i D \in \mathbb{C}[x] D$.

$$\therefore \quad X_i f = 2(X_i D)D = c_i(x) f .$$

特に ~~表~~ $X_1 = \sum \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} = \sum k_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ であり,

$$X_1 f = \ell h f .$$

$\det(g_{ij}) = \lambda^2 D^2 = \lambda^2 f$ より, (S) $X_1, \cdots, X_\ell$ は $\mathcal{O}_X$ 上 locally free, かつ

$$\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{O} X_i$$

とおけば, $\mathfrak{g} = \{X : \text{vector field} \mid Xf \in \mathcal{O}f\}$ であることがわかる. [3]. 但し, 後に $\mathfrak{g}$ が, f^s の各 Lagrangeans で simple holonomic system を与えることを示すので, このことは必ずしも必要ではない。

$\mathfrak{g}$ から導かれる f^s の annihilators $X_i - c_i(x)s$ の生成した $\mathcal{D}[s]$ の ideal を $\mathcal{J}[s]$ とおく.

$$\mathcal{M}' = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s],$$

$$\mathcal{M}'_\alpha = \mathcal{D}/\mathcal{J}[\alpha] \qquad (\mathcal{J}[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P(s) \in \mathcal{J}[s]\})$$

が以下の考察の対象である.

§ 2. 基本定理.

記号は前§のままとする. 表現空間 E を複素化し, $V=\mathbb{C}\otimes E$, $V^*=\mathbb{C}\otimes E^*$ とおく.

$$\begin{tikzcd}
(\xi) & V^*_\xi \arrow[d, "/W_\ell"] & \supset \{D=0\} \arrow[d] \\
(x) & \mathbb{C}^\ell_x & \supset \{f=0\}.
\end{tikzcd}$$

map $(\xi)\mapsto(x)$ は, $f=0$ の外では $\# W_\ell$ 重の covering になっている。 $f(x)$ は weighted homogeneous of type $(k_1,\dots,k_\ell;\ell h)$ であった. (x) の dual 座標を (η) であらわす

Theorem

(1) $\check{S}S f^s$ (s generic $\in\mathbb{C}$) はすべて simple holonomic set よりなり, 特に原点 conormal における principal symbol は

$$\eta_1^{-\frac{1}{2}\ell h(s+\frac{1}{2})-\frac{\ell}{2}}\sqrt{d\eta_1\cdots d\eta_\ell}\ .$$

従って, order $=-\frac{1}{2}\ell h(s+\frac{1}{2})$

$\{X_1,\dots,X_\ell\}$ は原点 conormal において simple である.

(2) $\check{\mathcal{E}} f^s$ の holonomy diagram の各 Lagrangians は, 次の様にきまる。 S の部分集合全体の集合に, 同値関係

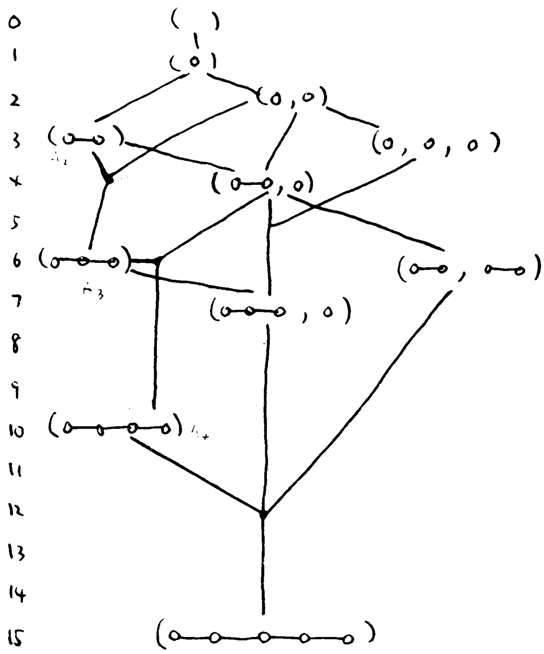
$S'\sim S''$ $\Leftrightarrow$ S' が W_ℓ 内で生成した部分群と S'' のそれとが W_ℓ 内で共役

を入れて類別する*. その各類が一つの Lagrangian を表わし, その codimension は $\# S'$, S' により定まる Coxeter System の既約分解を $\Pi(W_i,S_i')$, $l_i=\# S_i'$, coxeter number of $W_i=h_i$ とすれば $\mathrm{codim}=\Sigma l_i$, order $=-\frac{1}{2}(\Sigma l_i h_i)(s+\frac{1}{2})$. 又, S_i' から一つの頂点をのぞいてえられるものを $\{S''_{i,j}\}$ とすれば,

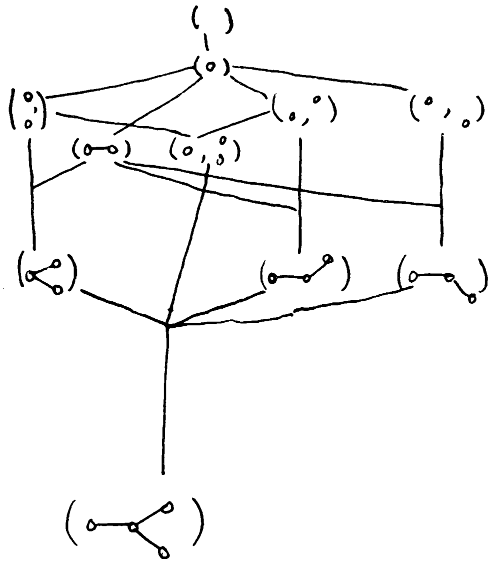
* $A_\ell, E_6, H_3, H_4, I_2(2m+1)$ においては, S' と S'' のグラフが等しいとき共役になることが示される.

$\{S''_{ij}\}$ に対応する Lagrangians は, S' と, おいて 同じところで交わり, $i \neq i'$ に対して, $\{S''_{i'j}\}$ たちの, S' に対する交わりは, 又別のところである。* //

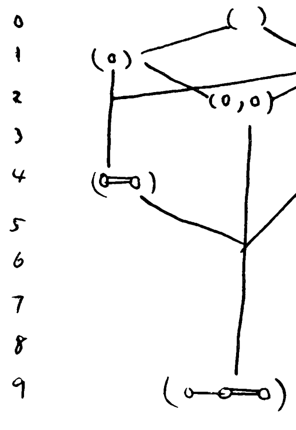
(2) の statement はかなりこみいっているが, 実例により意味をとられたい. 実際に holonomy diagram をかくとき, 2つの Lagrangian 間で別の2か所以上で交わっているとき, そのうちの一つで作用させて特に多くの線をひかない.



A_5



D_4



B_3

これでわかるように, 部分群の共役類が関係するため, A型以外は複雑である。(たとえば D_5 では (o—o—o—o) と (o—o—o\o) は共役になる)

* その他に交わりはないと予想されている

以下いくつかの段階にわけて、Theoremを示していく。

$e_{\alpha_i}(\xi) = \varphi_i(\xi)$ とおく。diagram (o—o···) に表われる $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_j}$ に対し、$\{\varphi_{i_1}(\xi) = \cdots = \varphi_{i_j}(\xi) = 0\}$ を $F(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_j})$ それを x-space におとした集合の conormal を $\Lambda(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_j})$ と記す。面分Fは $S' = \{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_j}\}$ の生成した $\underbrace{\text{部分群}}_{W_{S'}}$ の固定点全体であり、余次元jである。$S'' = \{\alpha_{k_1},\dots,\alpha_{k_j}\}$ に対して、$g^{-1}W_{S''}g = W_{S'}$ であれば、$gF(i_1,\dots,i_j) = F(k_1,\dots,k_j)$ 又、よくしられていること* もあわせて、面分全体の集合において、Wの orbit を一まとめにしたもの** と、Wにおける、Sの部分集合が生成した部分群の共役類とは一対一に対応する。

特に $\xi_1 = \cdots = \xi_l = 0 \Leftrightarrow W$, $V_\xi \Leftrightarrow \{e\}$. 又、Coxeter 群においてよくしられているように、Sの1個の元が共役かどうかは、その diagram において奇数をしるした線分によって結ばれているかどうかによる。従って、余次元1の面分の同値類は $A_l, D_l, E_l, H_3, H_4, I_2(2m+1)$ では1つ。

B_l, F_4, G_2, $I_2(2m)$ では2つである。(これは群が既約であるか、2つの既約因子にわかれるかに対応する。)

* すべての面分は $F(i_1,\dots,i_j)$ のどれかにgの作用でうつせ、そのとき、それを固定する部分群は共役。
** それは $/W_l$ で下におとすと、同じ一つの　ずる上にくる。

一般に、$g\in H$ に対し $e_g(\xi_0)=0$ とすれば、$e_g\big((\mathrm{grad}_\xi x_i)(\xi_0)\big)=0$ は容易にわかる。すなわち、infinitesimal action $\xi\mapsto\xi+\varepsilon(\mathrm{grad}_\xi x_i)(\xi)$ について $\{e_g(\xi)=0\}$ は安定であり、よって各 $F(i_1,\dots,i_j)$ は $X_1,\dots,X_\ell$ の作用で安定である。* 「$F(i_1,\dots,i_j)$ の generic point では、$\mathrm{corank}(g_{ik})=j$、即ち $F(i_1,\dots,i_j)$ を $\mathbb{C}^\ell_x$ にうつした像は $\mathfrak{g}=\sum\mathcal{O}X_i$ の orbit である。」このことは、一般 $A_\ell, B_\ell, D_\ell, F_4, G_2, H_3, I_2(h)$ について個々に正しいことが直接しらべられるが、一般には次に述べる方法で次元1の面分に帰着させる。

次元1の面分 F をとる。例えば $\varphi_1(\xi)=\cdots=\varphi_{\ell-1}(\xi)=0$ とせよ。この F/W_ℓ の generic point では $\mathrm{rank}(g_{ik})=1$ である。実際、前にのべたことより、$\mathrm{rank}(g_{ik})\leq 1$ である。もし $\mathrm{rank}(g_{ik})=0$ ならば、$x_1=x_2=\cdots=x_\ell=0$ となるが（∵ X_1 の係数）それより $\xi_1=\cdots=\xi_\ell=0$ を得るので矛盾である。F の generic point でそれに直交する $\ell-1$ 次元空間 V' をとれば、それは $e_1,\dots,e_{\ell-1}$ の直交基 生成したものであり、従って V' において W の作用は $(s_1,\dots,s_{\ell-1})$ により定まる Coxeter 群の作用であり、D の V' への制限はその基本反不変式になる。よって、F/W_ℓ の generic point で、それに transversal な方向への localization が、$(W_{S'},S')$ $S'=(s_1,\dots,s_{\ell-1})$ に対する f' となる。

* 特に、$\mathbb{C}^\ell\setminus\{f=0\}$ では $\mathrm{corank}(g_{ik})=0$ より $\mathbb{C}^\ell\setminus\{f=0\}$ は $\mathfrak{g}=\sum\mathcal{O}_xX_i$ の一つの orbit.

又, 次元2の面分 F', 例えば $\varphi_1=\cdots=\varphi_{\ell-2}=0$ は, F において次元1の面分とみなせ, 従って $F'/W_\ell \doteq \mathrm{rank}(g_{ik})=1+1=2$ である.

よって, $\check{S}S\,\mathcal{D}f^{\lambda}$ にあらわれるのは, 面分$/W_\ell$ の形のものにかぎられる.

$g_{ij}=g_{ji}$, $\quad g_{1j}=k_jx_j$ であることから,

$\sigma(X_1)\cdots\sigma(X_\ell)$ が $T^*_{\{0\}}\mathbb{C}^\ell$ において simple であることは明らかである。(伊丹の lemma) 一般の F^q/W_ℓ の conormal i.e. $\Lambda(\varphi_1\cdots\varphi_q)$ においても, 対応する Coxeter 群の既約分解に応じて, simple な多項式の変数を共有しない積になるから simple である。

更に conormal における principal symbol は, Lie 環の形から, $\eta_2,\dots,\eta_\ell$ を含まぬことが直ちにわかり, $k_1=2$,

$\sum k_i=\frac{1}{2}\ell h+\ell$ を考慮すれば, $\eta_1^{-\frac{1}{2}\ell h(s+\frac{1}{2})-\frac{\ell}{2}}\sqrt{d\eta_1\cdots d\eta_\ell}$

を得る。

次に交わりを考える. 次元1の面分 F は, ある real numbers $(a_1\cdots a_\ell)$ により $\{(a_1,\dots,a_\ell)t\}$ の形をしているとしてよい.

F/W_ℓ は $\{(A_1t^2, A_2t^{k_2},\dots,A_\ell t^{k_\ell})\}$ であり, ここに $A_1=\sum a_i^2\neq 0$.

この tangent は $(2A_1t,\ k_2A_2t^{k_2-1},\dots,k_\ell A_\ell t^{k_\ell-1})$ より

conormal vector $(\eta_1,\dots,\eta_\ell)$ は $t\neq 0$ において

$$2A_1\eta_1+\sum{}' k_iA_i\eta_i t^{k_i-2}=0$$ をみたさねばならない.

よって, F/W_ℓ の conormal bundle と, $T^*_{\{0\}}\mathbb{C}^\ell$ の交わりは

$t\neq 0$ では $\eta_1=0$ で与えられる。(もっとも principal symbol をみれば, ここでは交わらない)

従って、一般の F/W_ℓ においては、それに対応するグラフの連結成分ごとにこのような交わりがある。これ以外に交わりがないかどうかについては、一般的には証明できていないが、A_ℓ, B_ℓ, , G_2, $I_2(m)$ については容易にたしかめられる。D_ℓ は少しめんどうであるがやはり正しい。F_4 H_3 については Lagrangian をすべて決定できるので、それについて 他の性質も[illegible]で 個々にあたってみればすむ。E_7 E_8, が不明である。

E_8 以外のすべての holonomy diagram は個々にたしかめてある。

§3. A_ℓ, B_ℓ, D_ℓ.

tについての n 次式 $x_0t^n+x_1t^{n-1}+\cdots+x_n$ の判別式を $\Delta(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ と記す.

$$f_{A_\ell} = \Delta(1,0,x_2,\cdots,x_{\ell+1})$$

$$f_{B_\ell} = x_\ell\Delta(1,x_1,x_2,\cdots,x_\ell)$$

$$f_{D_\ell} = \Delta(1,x_1,x_2,\cdots,x_{\ell-1},x'^{2}_{\frac{\ell}{2}}).$$

とΔを用いて表示される。$\Delta(1,x_1,\cdots,x_{\ell-1},yz)$ も simple であり, 特に $\Delta(1,x_1,x_2,yz)$ は prehomogeneous vector space $(SL(3)\times SL(3)\times GL(2),\ \square\otimes\square\otimes\square)$ の codimension 4 の orbit (order $-6s-\frac{8}{2}$) での localization にあらわれる。

$(SL(5)\times GL(4),\ 日\otimes\square)$ においては A_2, A_3, A_4 があらわれる.

$\Delta(x_0,x_1,x_2,x_3)$ は simple であり, $(GL(2),\ 田)$ の relative invariant であるが, 一般のΔは, monic, i.e. $x_0=1$ にした上で, 上記のようなものにすれば, simple である。

後に決定される Lie 環の形から,

$$\Delta(1,0,y_1^{m_1}\cdots y_k^{m_k},x_3,\cdots,x_{\ell+1})$$

$$x_\ell\Delta(1,y_1^{m_1}\cdots y_k^{m_k},x_2,\cdots,x_\ell),\quad \Delta(1,y_1^{m_1}\cdots y_k^{m_k},x_2,\cdots,x_{\ell-1},x'^{2}_{\frac{\ell}{2}})$$

$$\Delta(1,y_1^{m_1}\cdots y_k^{m_k},x_2,\cdots,x_{\ell-1},yz)$$

は $T^*_{S_1}X$ においてsimpleであることがわかる

基本不変式 (A_l) $x_\nu = (\xi_1,\cdots,\xi_{l+1})$ の ν次基本対称式 $\times(-)^\nu$

ただし $\xi_{l+1} = -(\xi_1+\cdots+\xi_l)$. $2\leq\nu\leq l+1$.

(B_l) $x_\nu = (\xi_1^2,\cdots,\xi_l^2)$ の ν次基本対称式 $\times(-)^\nu$

$1\leq\nu\leq l$.

(D_l) $x_\nu =$ B_l と同じものを $1\leq\nu\leq l-1$, $x'_{\frac{l}{2}} = \xi_1\cdots\xi_l$.

各々の Lie 環は, 次の対称行列 (A_l) (B_l) (D_l) により

きまる。ここで, $p_n(t) = t^n + x_1 t^{n-1} + \cdots + x_n$ とおく.

(A_l) を次のように定義する.

$$(u^{l-1},\cdots,1)(A_l)\begin{pmatrix} v^{l-1}\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \left(-\frac{p_{l+1}(u)p'_{l+1}(v) - p'_{l+1}(u)p_{l+1}(v)}{u-v} + \frac{1}{l+1}p'_{l+1}(u)p'_{l+1}(v)\right)\Bigg|_{x_1=0}$$

(B_l)

$$(u^{l-1},\cdots,1)(B_l)\begin{pmatrix} v^{l-1}\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \frac{u p'_l(u)p_l(v) - p_l(u)\, v p'_l(v)}{u-v}$$

(D_l)

$$(D_l) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{2x'_{\frac{l}{2}}}\end{pmatrix}(B_l)\Big|_{x_l = x'^2_{\frac{l}{2}}}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{2x'_{\frac{l}{2}}}\end{pmatrix}$$

Lie 環 $\mathfrak{g}$. $\boxed{A_l}$ $\boxed{B_l}$ $\boxed{D_l}$

$$\begin{pmatrix} X_0\\ \vdots\\ X_{l-1}\end{pmatrix} = (A_l)\begin{pmatrix} D_2\\ \vdots\\ D_{l+1}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_0\\ \vdots\\ X_{l-1}\end{pmatrix} = (B_l)\begin{pmatrix} D_1\\ \vdots\\ D_l\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_0\\ \vdots\\ X_{l-2}\\ X'_{\frac{l}{2}-1}\end{pmatrix} = (D_l)\begin{pmatrix} D_1\\ D\\ \vdots\\ D_{l-2}\\ D'_{\frac{l}{2}}\end{pmatrix}$$

Lie環が上の様にして求められることは，例えば (B_ℓ) のとき，次の様にわかる。 $\psi(u)=\prod(u-\xi_i^2)=u^\ell+x_1u^{\ell-1}+\cdots+x_\ell$.

$$\frac{1}{4}\sum_{j,k}\left(\sum_i\frac{\partial x_j}{\partial\xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_i}\right)u^{\ell-j}v^{\ell-k}=\frac{1}{4}\sum_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\psi(u)\frac{\partial}{\partial\xi_i}\psi(v)$$

$$=\sum\xi_i^2\frac{\psi(u)}{u-\xi_i^2}\frac{\psi(v)}{v-\xi_i^2}=\frac{\psi(u)\psi(v)}{u-v}\sum\left(\frac{\xi_i^2}{v-\xi_i^2}-\frac{\xi_i^2}{u-\xi_i^2}\right)$$

$$=\frac{\psi(u)\psi(v)}{u-v}\left(\frac{v\psi'(v)}{\psi(v)}-\frac{u\psi'(u)}{\psi(u)}\right)\qquad\left(\because\sum\frac{\xi_i^2}{u-\xi_i^2}=\sum\left(\frac{u}{u-\xi_i^2}-1\right)=u\frac{\psi'(u)}{\psi(u)}-\ell\right)$$

$$=\frac{\psi(u)v\psi'(v)-u\psi'(u)\psi(v)}{u-v}.$$

我々は係数の都合上，上の -1 倍をとっている。尚，

$\varphi(u)=\prod(u-\xi_i)=u^\ell+x_1u^{\ell-1}+\cdots+x_\ell$ の場合，同様に

$$\sum_{j,k}\left(\sum_i\frac{\partial x_j}{\partial\xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_i}\right)u^{\ell-j}v^{\ell-k}=\frac{\varphi(u)\varphi'(v)-\varphi'(u)\varphi(v)}{u-v}$$

であることを注意しておく。

(A_3)

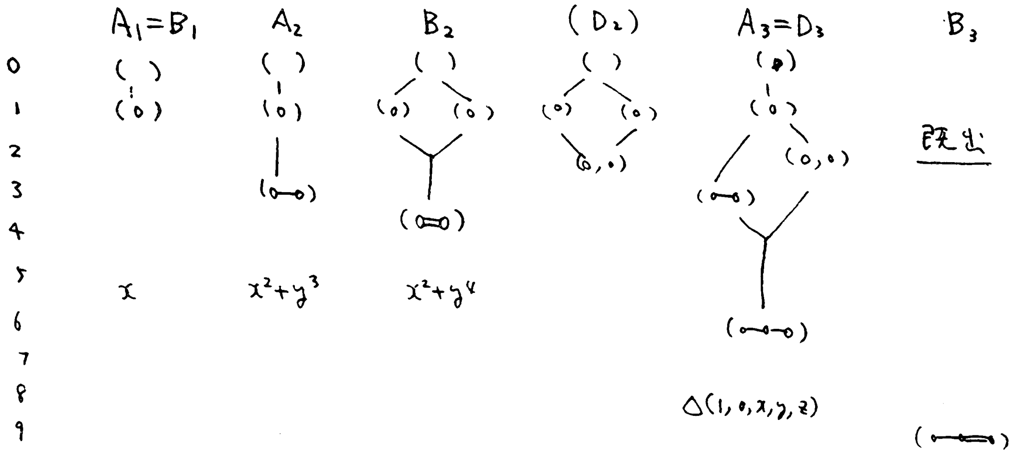
$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$
$3x_3$	$4x_4-x_2^2$	$-\frac{1}{2}x_2x_3$
$4x_4$	$-\frac{1}{2}x_2x_3$	$2x_2x_4-\frac{3}{4}x_3^2$

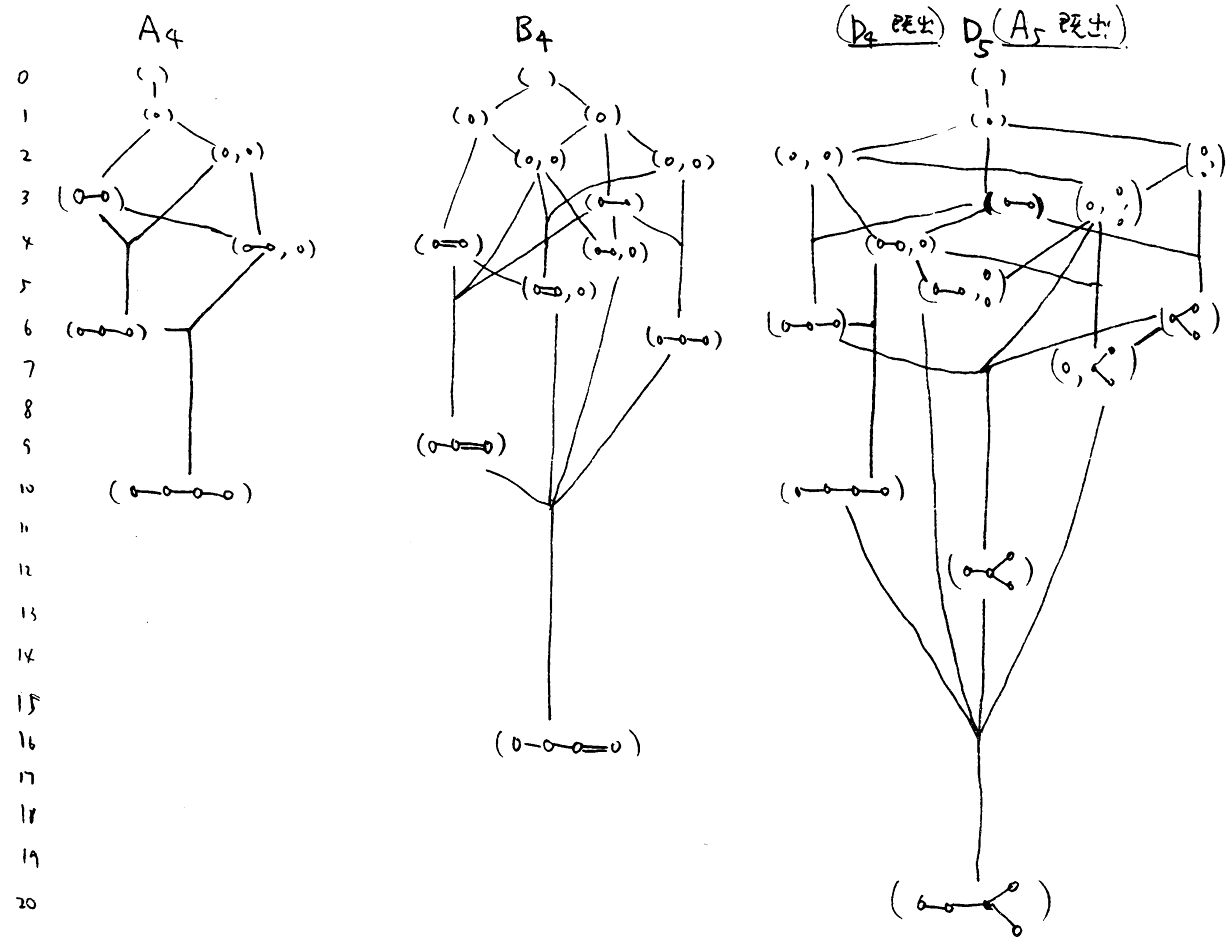
(B_4)

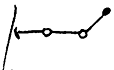
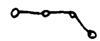
x_1	$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$
$2x_2$	$3x_3+x_1x_2$	$4x_4+2x_1x_3$	$3x_1x_4$
$3x_3$	$4x_4+2x_1x_3$	$3x_1x_4+x_2x_3$	$2x_2x_4$
$4x_4$	$3x_1x_4$	$2x_2x_4$	x_3x_4

(D_4)

x_1	$2x_2$	$2x_2'$	$3x_3$
$2x_2$	$3x_3+x_1x_2$	$\frac{3}{2}x_1x_2'$	$2x_1x_3+4x_2'^2$
$2x_2'$	$\frac{3}{2}x_1x_2'$	$\frac{1}{4}x_3$	x_2x_2'
$3x_2$	$2x_1x_3'+4x_2'^2$	x_2x_2'	$x_2x_3+3x_1x_2'^2$





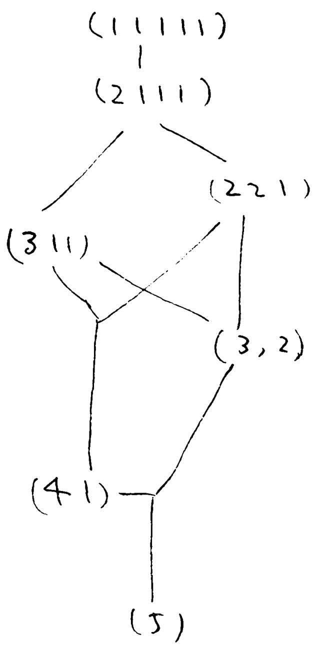
 と  は
同じ orbit になる. 一般に
D_{2m} と D_{2m+1} ではこういう差が
おこってくる. cf. D_4

§ A_ℓ

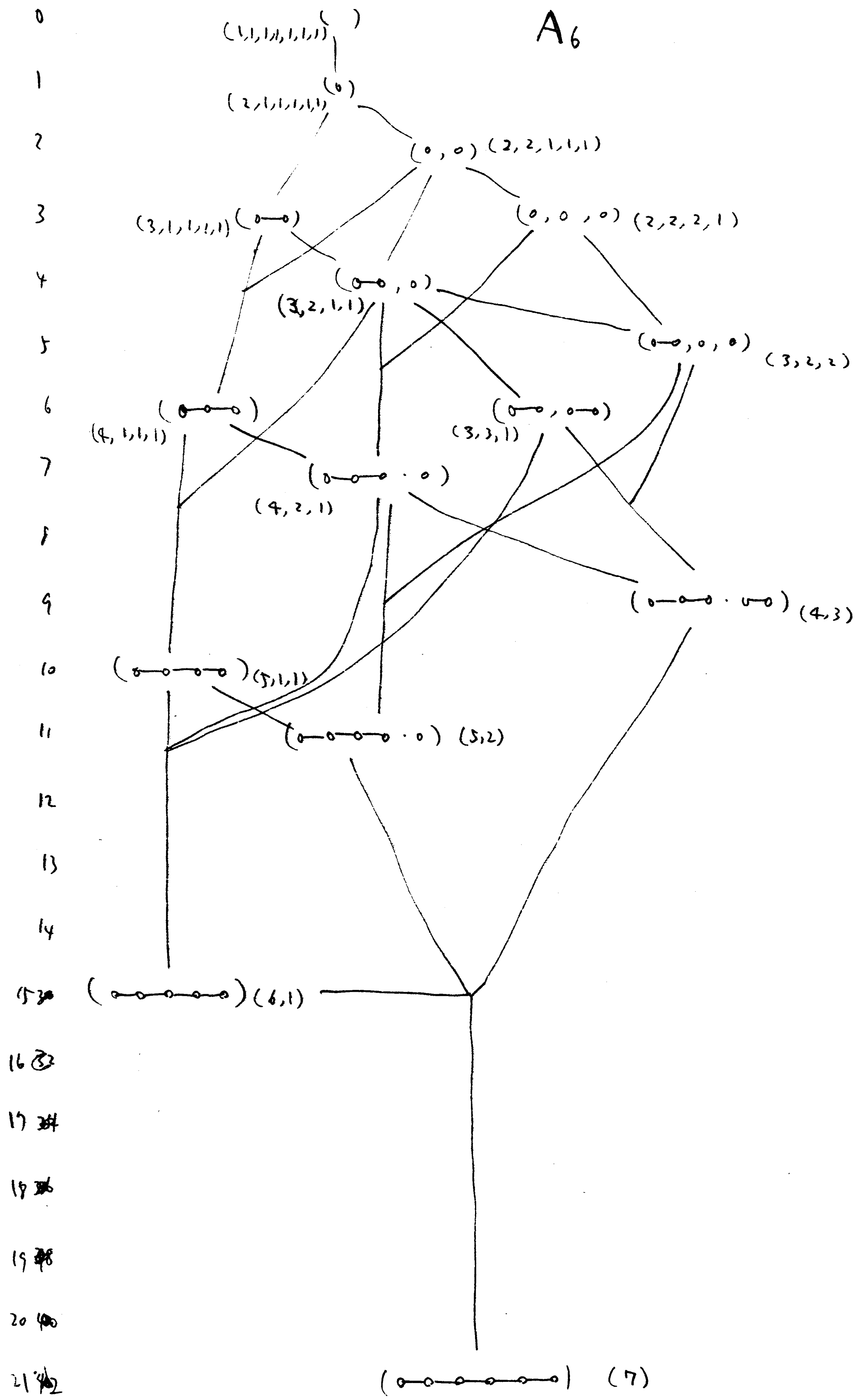
これは佐藤先生によりしらべられた．以下便宜上 $(\xi_1,\dots,\xi_{\ell+1})$ において考察し，$\mathbb{R}^{\ell+1}_\xi \xrightarrow{/\mathfrak{S}_{\ell+1}} \mathbb{R}^{\ell+1}_x$，$x_\nu=(\xi_1\cdots\xi_{\ell+1}$ の ν 次基本対称式$)\times(-)^\nu$ を用いる。$f=\Delta(1,x_1,\dots,x_{\ell+1})$ は $\mathbb{R}^{\ell+1}_x$ の原点 conormal には f^s の ~~support~~ singular support をもたない．$(t,t,\dots,t)/\mathfrak{S}_{\ell+1}$ が $\Delta(1,0,x_2,\dots,x_{\ell+1})$ での原点 conormal に対応する。

$(s_1,\dots,s_\ell)$ の部分集合の生成した部分群は，その diagram が同じであれば，明らかに共役である。よって，各 holonomic set は $(n_1,\dots,n_k)$ $n_i\geq 1$ $\sum n_i=\ell+1$ なる整数の組により代表される．親子関係は，一つの n_i を，2つに分割することにより生じ，　，交わりもそれしかないことがわかる。（それには不等式に ξ_ν（ν の和）をとるとよい。）

A_4.



各 n_i の分割に対して，交わりが1カ所づつある。

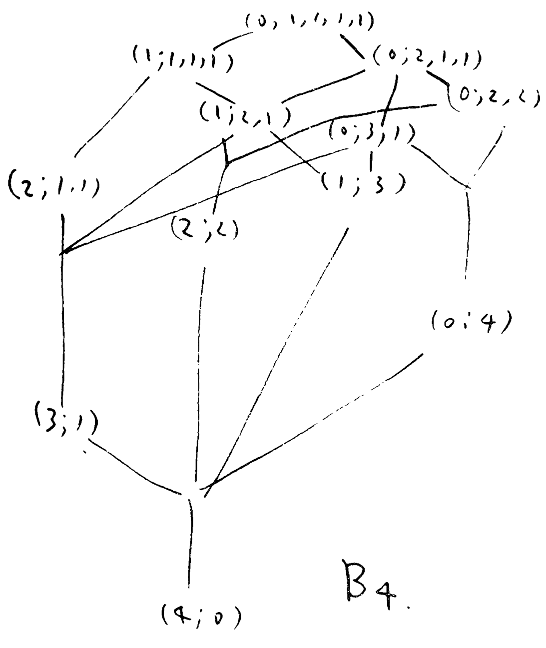

A$_6$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
(1,1,1,1,1,1,1)
(2,1,1,1,1,1)
(2,2,1,1,1)
(3,1,1,1,1)
(2,2,2,1)
(3,2,1,1)
(3,2,2)
(4,1,1,1)
(3,3,1)
(4,2,1)
(4,3)
(5,1,1)
(5,2)
(6,1)
(7)

§ B_ℓ

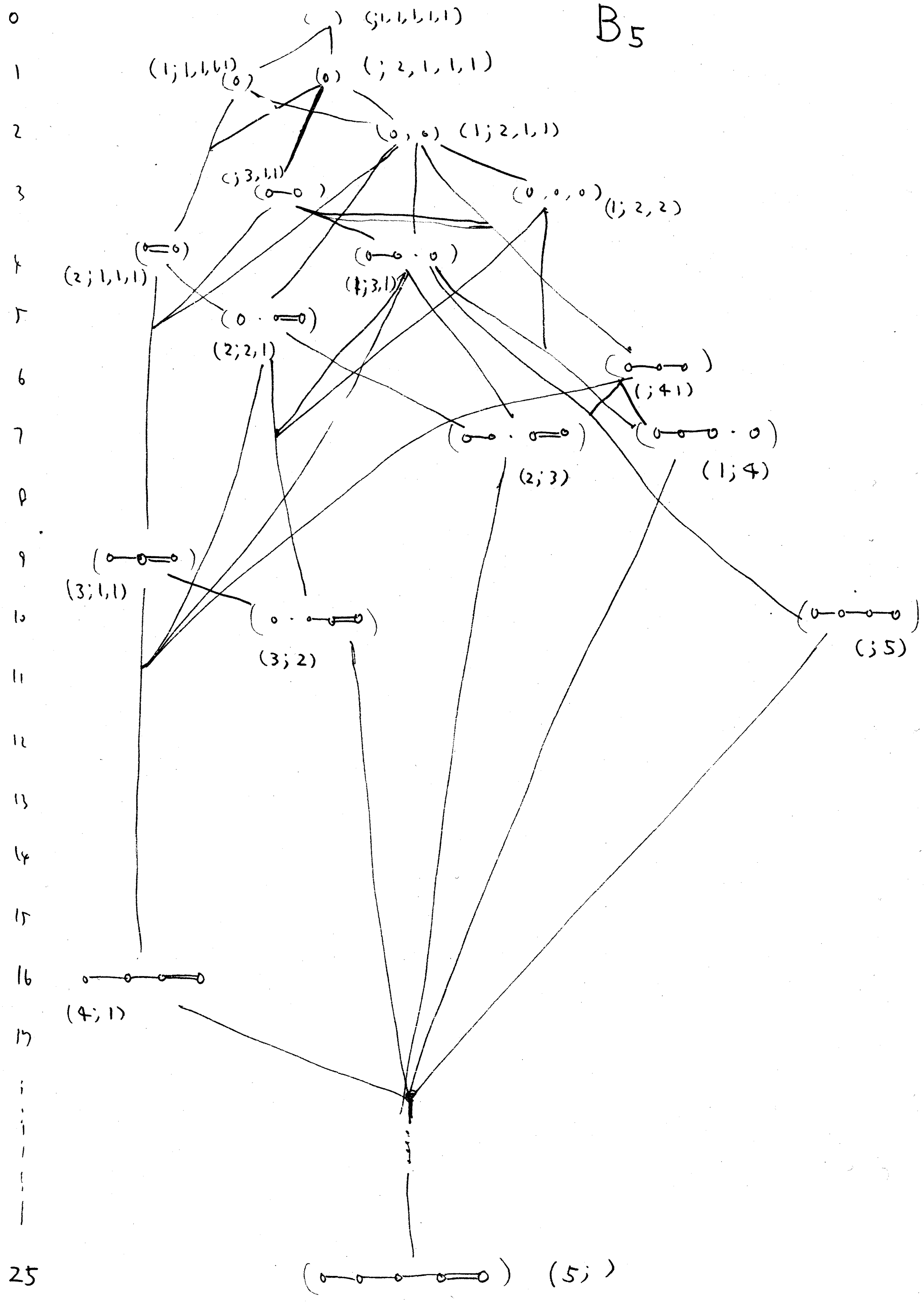
(ξ_i)への作用は かってな置換と, $\xi_i \mapsto \pm\xi_i$ である.
共役類は $(n_0; n_1,\dots,n_k)$ $n_0+n_1+\dots+n_k=\ell$ $n_0\ge 0$, $n_i\ge 1$ $1\le i\le \ell$
なる整数の組により代表される. (codim $= n_0+\sum_1^k (n_i-1)$.
order $= -\left(n_0^2+\sum_1^k \binom{n_i}{2}\right)(\alpha+\frac{1}{2})$.) これは, (ξ_i)のうち
n_0個が0, 残りのn_i個づつが (non-zeroで) 等しいことを示す.

$(1; 1,\dots,1)$ と $(; 2,1,\dots,1)$ とはともに diagram (∘) であるが, 共役でなく, それぞれ hypersurface $x_\ell=0$, $\Delta(1,x_1,\dots,x_\ell)=0$ の conormal に対応する。

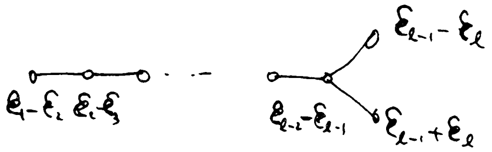
不変式の base には, g_ν (ξ_i^2のν次和) $1\le\nu\le\ell$ をとってもよい.
Lagrangeans の包含関係は, n_0を2つに分けて, 一方をうちへ入れることと, 一つの n_i $1\le i\le k$ を2つに分割することにより生じる.
交わりも, それらに尽きる.



B_4.


B5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
25
(;1,1,1,1,1)
(1;1,1,1,1)
(;2,1,1,1)
(1;2,1,1)
(;3,1,1)
(1;2,2)
(2;1,1,1)
(1;3,1)
(2;2,1)
(;41)
(2;3)
(1;4)
(3;1,1)
(3;2)
(;5)
(4;1)
(5;)

§ D_ℓ



D_ℓ の (ξ_i) への作用は、すべての (i) の置換と、$\xi_i \mapsto \varepsilon_i\xi_i$, $\varepsilon_i=\pm1$, $\prod\varepsilon_i=1$ である。ξ space において、函数の共役類は、

$(n_0;n_1,\dots,n_k)$ * $n_0=0$ or ≥ 2, $n_i\geq1$, $n_0+n_1+\dots+n_k=\ell$ ならびに

$(0;n_1,\dots,n_{k-1},[n_k-1,1])$ ← $n_1\cdots n_k$, even $n_k\geq2$ の形の 整数の組により

代表される。ここで、n_0 は、$(\xi_1,\dots,\xi_\ell)$ のうち n_0 つが 0 であることを示し、$n_1\dots n_k$ は残りの n_1 個, …, n_k 個づつが等しく、non-zero であることを表示している。又、第2のもの の $[n_k-1,1]$ は、i.e. $0\neq\xi_{\ell-n_k+1}=\xi_{\ell-n_k+2}=\dots=\xi_{\ell-1}=-\xi_\ell$ を表わす。

$n_1,\dots,n_k$ が even であれば、これは $(0;n_1,\dots,n_{k-1},n_k)$ とは D_ℓ の作用でうつりえない。ただし、$(0;n_1,\dots,[n_i-1,1],\dots,n_k)$ とは、うつりあう。 e.g. $(;4,[1,1])=(;[3,1],2)$

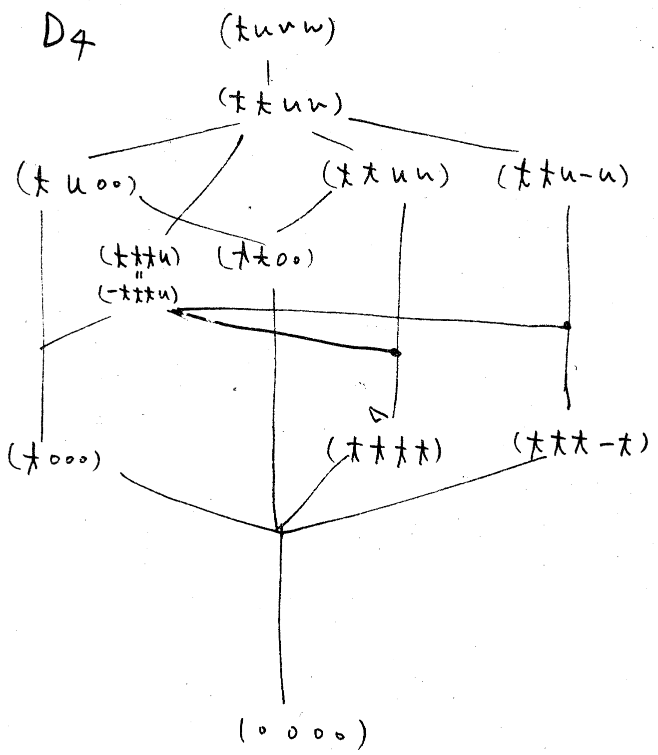
特に ℓ: odd の場合、この第2の type のものは存在しない。

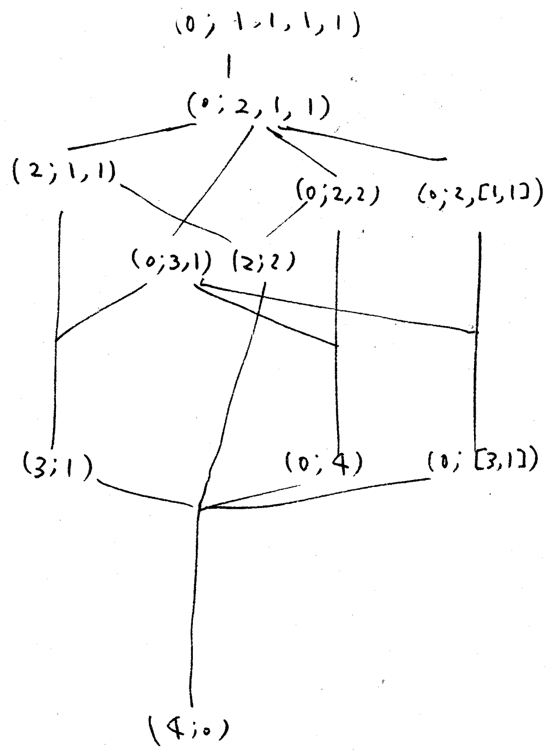
$n_0=1$ のものは存在しない。実際、operator $X'_{\frac{\ell}{2}-1}$ は $X'_{\frac{\ell}{2}}\neq0$ では $\xi\mapsto\xi+\frac{\varepsilon}{\xi}$ という action に対応し、$X'_{\frac{\ell}{2}}=0$, $X_{\ell-1}\neq0$ では (e.g. $\xi_1=0,\xi_2\cdots\xi_n\neq0$) $\begin{pmatrix}0\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$, $X'_{\frac{\ell}{2}}=X_{\ell-1}=0$ では zero 作用となる。

よって $(1;n_1\cdots n_k)$ は $(0;1,n_1,\dots,n_k)$ に含まれている。

* codim $=n_0+\sum_1^k(n_i-1)$, order $=-\left(n_0(n_0-1)+\sum_1^k\binom{n_i}{2}\right)(\rho+\frac{1}{2})$.

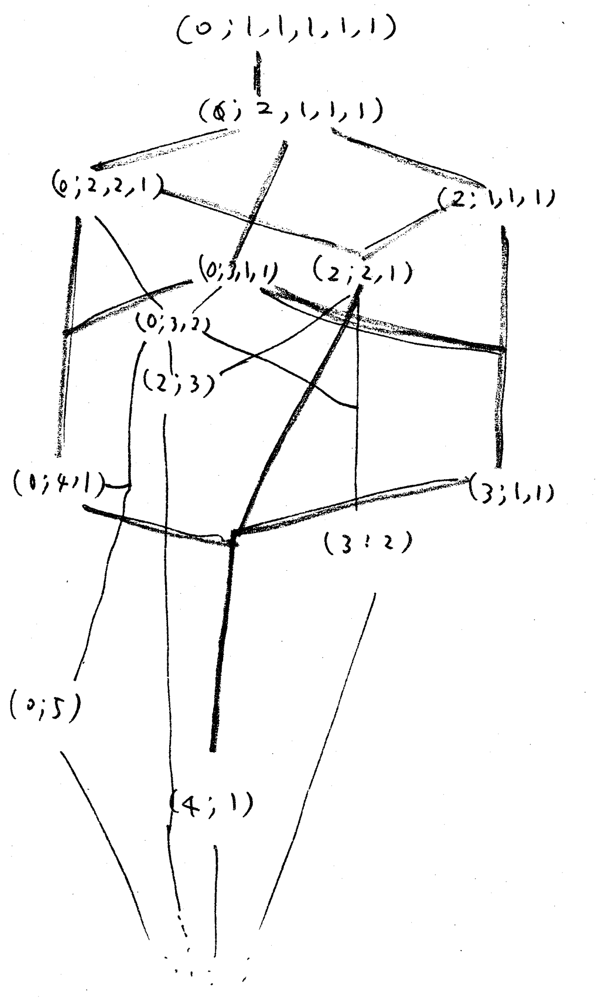
D_4



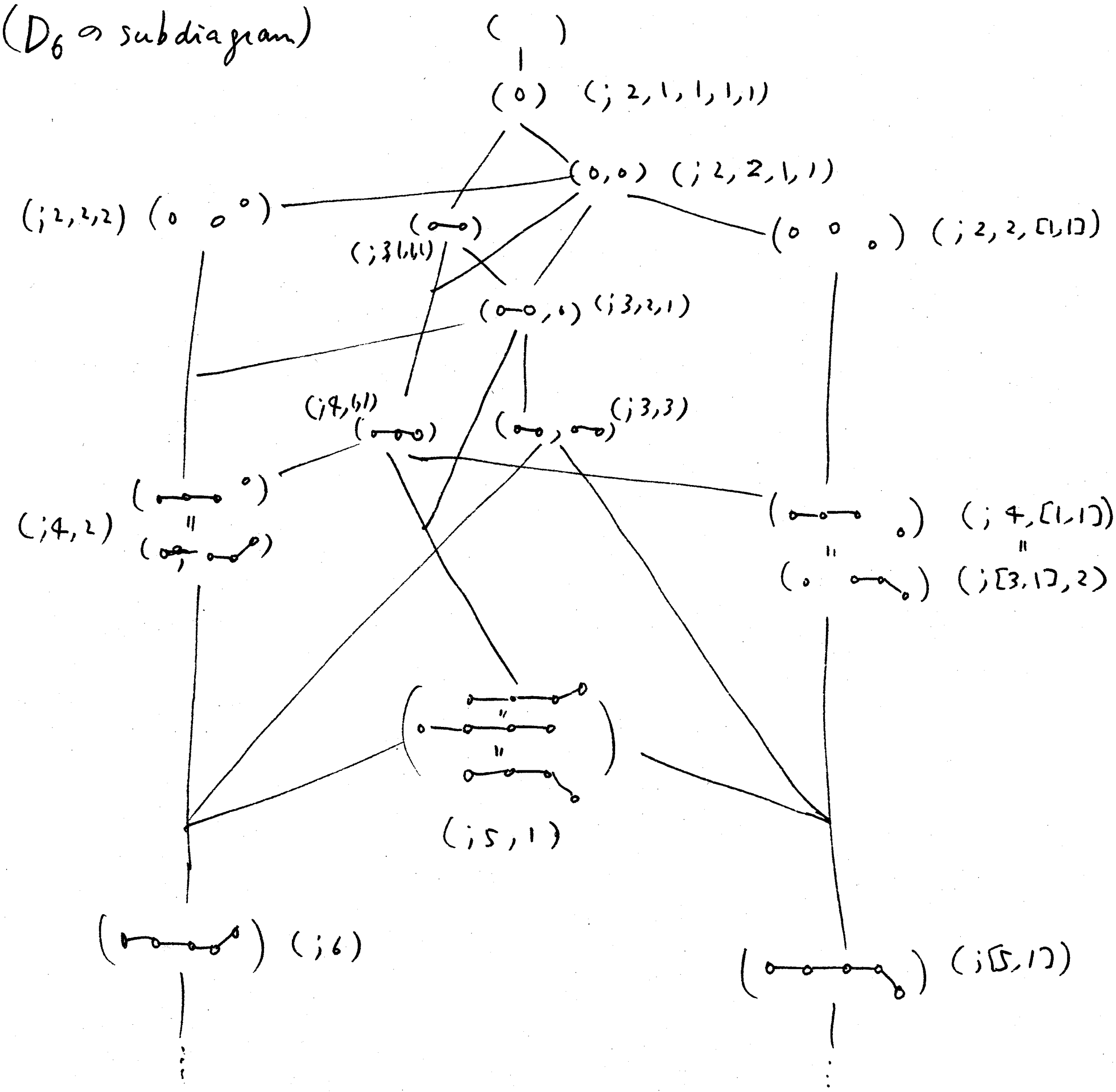


D_5

右における (4;1) は diagram ( ) であるが，群 D_5 全体の作用により，その上の holonomy diagram は，D_4 のものの一部を融合させたものになる。



(D_6 の subdiagram)



§4. 例外群に対応するもの.

E_6 E_7 E_8, F_4, G_2.

G_2 は例の $I_2(6)$ とみれるので、ここでは省略する。

F_4 の不変式 f は既約でなく、$f = g \cdot g^*$ という分解をもち、$g^*(z_1, z_3, z_4, z_6) = g(z_1, -z_3, z_4, -z_6)$ である.

holonomy diagram はいちじるしい対称性をもつ.

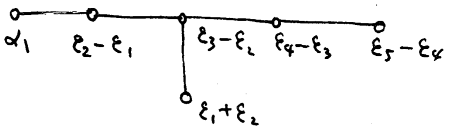
E_6 においては、holonomy diagram は、graph としてことなるものが一つづつあらわれるが、E_7 ではそうでない.

E_8 に関しては、同様に行なえるが、ここには示されていない.

E_l についての Lie 環 $\mathfrak{g}$ は未決定である。

E_l の基本不変式は、$(\xi_1, \cdots, \xi_{l-1}, \xi_l)$ の homogeneous polynomial として、$(\xi_1 \cdots \xi_{l-1})$ の D_{l-1} 不変式を係数とする、ξ_l の多項式になっている。それは原理的には (e.g. 正のルートの上の和 etc.) 知られているが、役に立つような形にはいまだ求まっていない

§ E_6



$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_8) - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_7)$$
$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_5) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_6'$$

$\mathbb{R}^8$ 内の $\xi_6 = \xi_7 = -\xi_8$ なる subspace をとる. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5$ と $\varepsilon_6' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_6+\varepsilon_7-\varepsilon_8)$ により正規直交系をとる. ε_6' の係数を ξ_6' と記す.

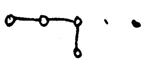
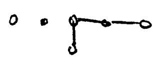
E_6 の作用は $\xi_1, \ldots, \xi_5$ のかってな置換と, $\xi_i \longmapsto \varepsilon_i \xi_i$ $1 \le i \le 5$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\prod \varepsilon_i = 1$, $\xi_6' \mapsto \xi_6'$, さらに, 次の元 (α_1 に関する鏡映) で生成される.

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = A \text{ とおく}$$

即ち $\xi_1 \cdots \xi_5$ に対しては, D_5 の作用がある.

次元1の面分の類として, 次の 6 つが考えうる.

 $(0, 0, t, t, t, -\sqrt{3}t)$  $(t,t,t,t,t, \tfrac{?}{\sqrt{3}}t)$

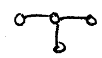
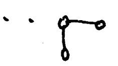
 $(0, 0, 0, t, t, \frac{-2}{\sqrt{3}}t)$,  $(-t, t, t, t, t, \frac{-5}{\sqrt{3}}t)$

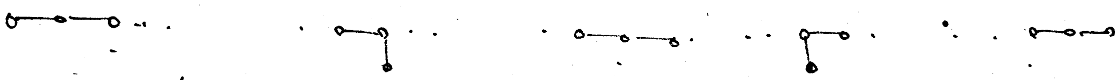
 $(0, 0, 0, 0, -\sqrt{3}t, t)$,  $(0, 0, 0, 0, 0, t)$

後4つの2つづつは, 実は 群の作用で 同じである. 実際,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} \sqrt{3}\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}t \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}t \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} -2\sqrt{3}\begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ t \\ -t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \xrightarrow{-2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$$-\begin{pmatrix}0\\0\\0\\t\\t\\-\frac{2}{\sqrt3}t\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\0\\t\\t\\\frac{2}{\sqrt3}t\end{pmatrix}\xrightarrow{4A}4\begin{pmatrix}t\\-t\\-t\\0\\0\\-\frac{t}{\sqrt3}\end{pmatrix}\longrightarrow4\begin{pmatrix}0\\0\\t\\t\\t\\-\frac{t}{\sqrt3}\end{pmatrix}\xrightarrow{4}2\begin{pmatrix}t\\-t\\t\\t\\t\\-\frac{5t}{\sqrt3}\end{pmatrix}\longrightarrow2\begin{pmatrix}-t\\t\\t\\t\\t\\-\frac{5}{\sqrt3}t\end{pmatrix}.$$

次元2のものも、同じ diagram のものはすべて E_6 の作用でうつることがわかる。尚このとき D_4 の diagram  があらわれるが、その上にくる次元3の diagram    はすべて同形になる。これは、D_4 自身では3つとも異なり、D_5 の sub diagram として区別されてきたものであった。このことは、直接には次の様にして確かめられる。



$\left(t\ t\ t\ u\ v\ \frac{-t-u-v}{\sqrt3}\right)$ $\left(0\ 0\ 0\ t\ u\ \frac{v}{\sqrt3}\right)$ $(t\ t\ t\ t\ u\ v)$ $(-t,t,t,t,u,v)$ (t,u,u,u,u,v)

後の3つは parameter のとりかえと $\xi_1\cdots\xi_5$ への D_5 の作用で同じであることがわかる。

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\t\\u\\\frac{v}{\sqrt3}\end{pmatrix}\xrightarrow{4A}\begin{pmatrix}t+u+v\\-(t+u+v)\\-(t+u+v)\\3t-u-v\\-t+3u-v\\\frac{-3t-3u+v}{\sqrt3}\end{pmatrix}\underset{ag}{\equiv}\begin{pmatrix}T\\-T\\-T\\U\\V\\*\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}T\\T\\T\\U\\V\\\frac{-T-U-V}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

よって初めの2つも同じ。

$$\begin{pmatrix}t\\t\\t\\t\\u\\v/\sqrt3\end{pmatrix}\xrightarrow{4A}\begin{pmatrix}6t+u+v\\2t-u-v\\2t-u-v\\2t-u-v\\-2t+3u-v\\\frac{-6t-3u+v}{\sqrt3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V\\T\\T\\T\\U\\\frac{-T-U-V}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

よって第4のものと第3のものは同じ。

(E_6, S) の S の部分集合 S_1, S_2 から生成した部分群は、S_1 と S_2 のグラフが同型であるときに、共役になることがわかった。従って、holonomy diagram も、かなり簡単になる。

尚、Coxeter diagram は左右対称であるが、その対称をひきおこす orthogonal matrix は、

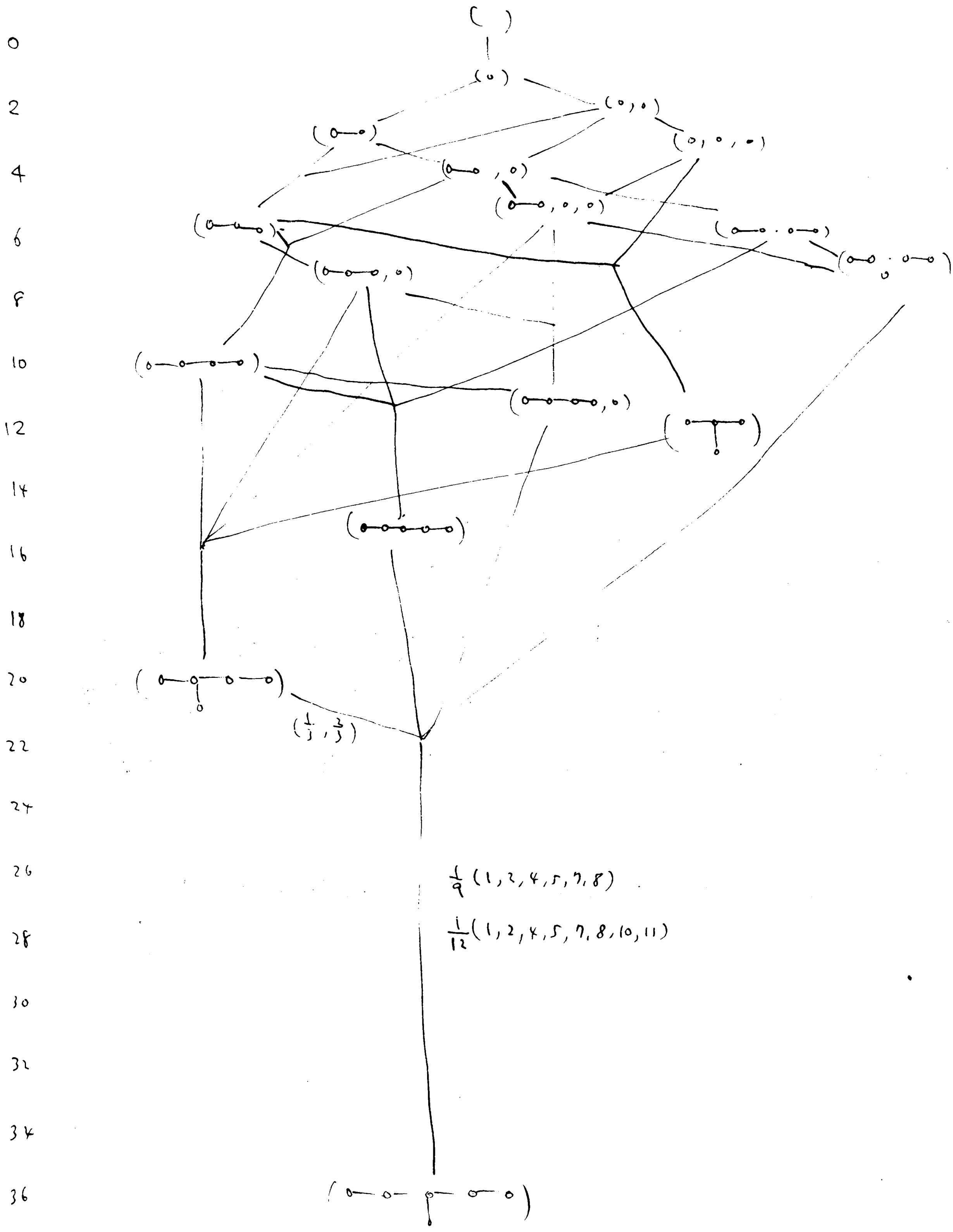
$$* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & 1 & & \\ -1 & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & -1 & -\sqrt{3} \\ & & & & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

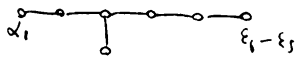
でよえられる。不変式 $g_2, g_5, g_6, g_8, g_9, g_{12}$ も、これに関してよい変換をうけるように定められるべきである。

(cf F_4). $g_2 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \cdots + \xi_5^2 + \xi_6'^2)$ は $g_2^* = g_2$ をみたす。

他の不変式は、$\xi_1 \cdots \xi_5$ に D_5 の作用を行い、ξ_6' を不変にしたとき、不変であることから、ξ_6' の多項式として、係数は $\xi_1 \cdots \xi_5$ の D_5 の不変式でなければならない。(この論法は E_7, E_8 についても、D_6, D_7 の作用に関して同様にいえる)

E_6


0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
( )
$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
$\frac{1}{9}(1,2,4,5,7,8)$
$\frac{1}{12}(1,2,4,5,7,8,10,11)$

§ E_7 

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \cdots - \varepsilon_6) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_7'$$

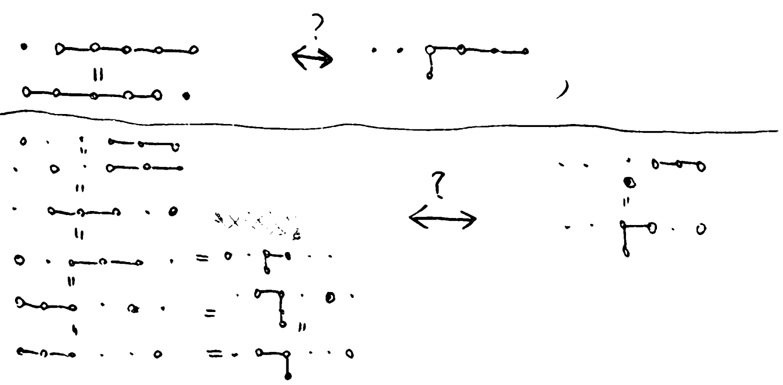
$$\varepsilon_7' = \varepsilon_7 - \varepsilon_8$$

$\xi_1\varepsilon_1 + \cdots + \xi_6\varepsilon_6 + \xi_7'\varepsilon_7'$ への作用として、$(\xi_1, \cdots, \xi_6)$ への D_6 の作用と、α_1 に対応する

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

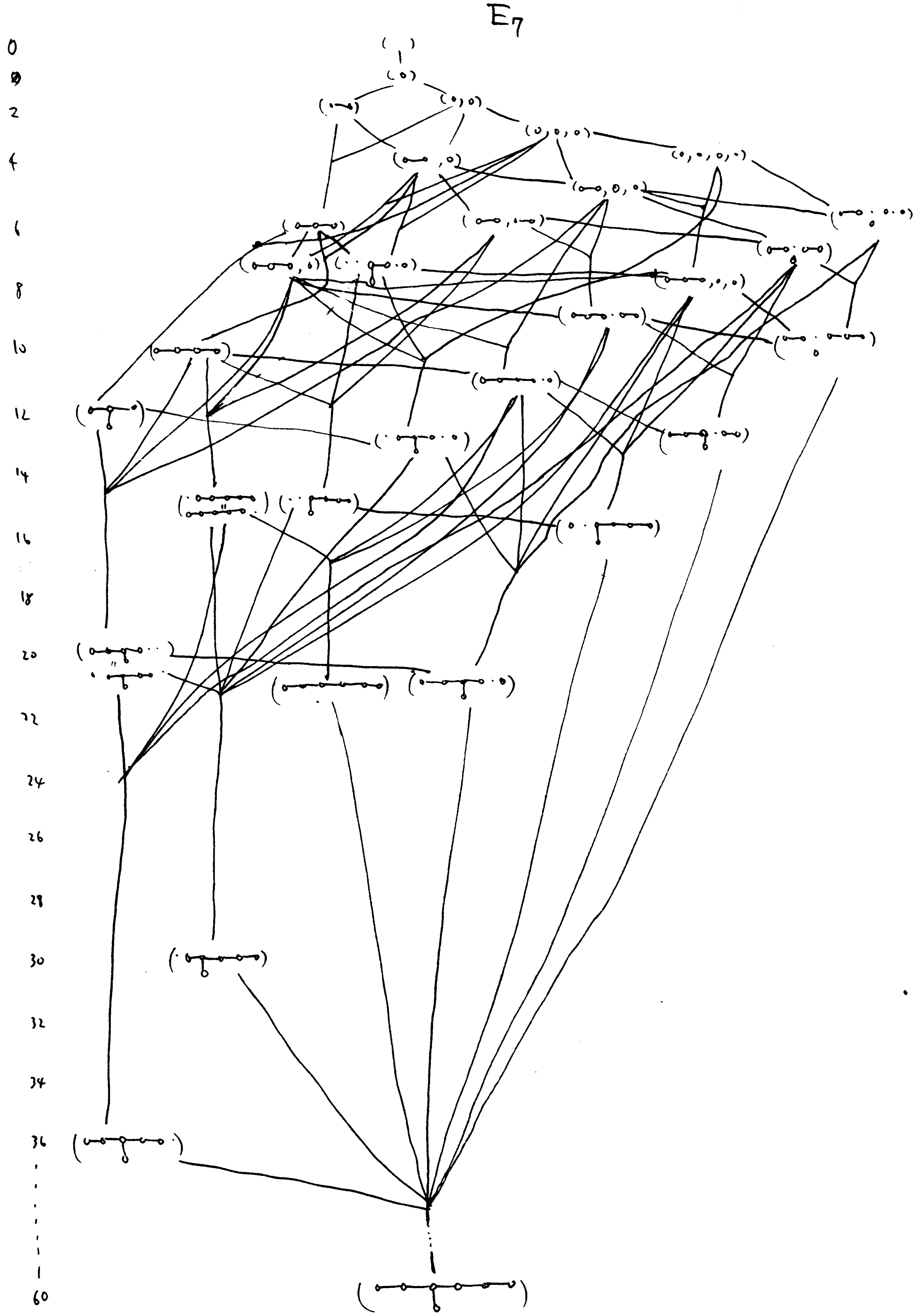
により生成される。

holonomy diagram の決定、即ち (E_7, S) の $S \supset S'$ により生成された部分群の共役類の決定には、すでに決定した E_6, D_l $l \leq 6$ A_l $l \leq 6$ の結果を援用すれば、A_5 型の2通り、$A_3 \times A_1$ 型の2通りが同一かどうかの *check* をすればよいことがわかる。



これらは各々共役でないとおもわれる。

E_8 についても同様に行なうが略する。


E7
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
60

§ F_4.

$$\overset{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\circ}\!-\!\!\!-\!\overset{\varepsilon_3-\varepsilon_4}{\circ}\!=\!\!\!=\!\overset{\varepsilon_4}{\circ}\!-\!\!\!-\!\overset{\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)}{\circ}$$

F_4 の root（に対応する壁の定義式）は48個（24個）であるが，下記の2 group にわかれ，それぞれ F_4 の作用で安定である。

1. $\pm\xi_i\pm\xi_j$ $\quad 1\leq i<j\leq 4$

2. $\pm\xi_i$, $\frac{1}{2}(\pm\xi_1\pm\xi_2\pm\xi_3\pm\xi_4)$.

従って，基本反不変式 $D=\prod^{24}(\quad)$，は $D=D_1D_2$ という分解をもち，具体的には $D_1=\prod^{12}(\xi_i^2-\xi_j^2)$，$D_2=\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\prod^{8}(\xi_1\pm\xi_2\pm\xi_3\pm\xi_4)$ である。 $* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&&\\1&-1&&\\&&1&1\\&&1&-1\end{pmatrix}$ により上の1.と2.はうつりあう。

s_ν, p_ν を，ξ_i^2 に関する ν 次巾和，ν 次基本対称式とする.

$D_1^2=\Delta_4(1,-p_1,p_2,-p_3,p_4)$ $\quad$ ($t^4-p_1t^3+p_2t^2-p_3t+p_4=0$ の discriminant)

$D_2^2=p_4\left((p_1^2-4p_2)^2-8^2p_4\right)^2=p_4\left((2s_2-s_1^2)^2-8^2p_4\right)^2$

基本　不変式は weight 2, 6, 8, 12 のものにより生成される.

以下 weight は半分にして，(1, 3, 4, 6) ととる. 特に，上の $*$ の作用に対して，$\chi_1^*=\chi_1$，$\chi_3^*=-\chi_3$，$\chi_4^*=\chi_4$，$\chi_6^*=-\chi_6$ となるものがとれる. χ_1, χ_3 は unique であり，χ_4, χ_6 は mod χ_1^4, mod $\chi_3\chi_1^3$ で unique である。以下では次のようにとる.

$$\chi_1=\frac{1}{2}s_1=\frac{1}{2}p_1$$

$$\chi_3=3s_3-\frac{15}{4}s_2s_1+\frac{15}{16}s_1^3=9p_3-\frac{3}{2}p_2p_1+\frac{3}{16}p_1^3$$

$$\chi_4=9s_4-\frac{21}{2}s_3s_1-\frac{21}{4}s_2^2+\frac{63}{8}s_2s_1^2-\frac{39}{32}s_1^4$$

$$=-36p_4-3p_2^2+\frac{9}{2}p_3p_1+\frac{3}{4}p_2p_1^2-\frac{3}{32}p_1^4 .$$

$$= -36p_4 - 3\left(p_2 - \frac{1}{4}p_1^2\right)^2 + z_3 z_1 = -36p_4 - 3p_2^2 + 9p_3 p_1 - z_3 z_1$$

$$z_6 = 2\left(p_2 - \frac{1}{4}p_1^2\right)\left(36p_4 - \left(p_2 - \frac{3}{4}p_1^2\right)^2 - \frac{1}{4}p_1^4\right) - \frac{1}{6}z_3^2 + \frac{1}{2}z_4 z_1^2 + \frac{1}{8}z_1^6$$

$$= 9\left\{(8p_2 - 3p_1^2)\left(p_4 - \frac{1}{36}p_2^2\right) - 3\left(p_3 - \frac{1}{6}p_2 p_1\right)^2\right\} + \frac{1}{6}z_3^2 - \frac{1}{2}z_4 z_1^2 - \frac{1}{8}z_1^6$$

$$= 72p_4 p_2 - \frac{27}{2}p_3^2 - \frac{45}{2}p_4 p_1^2 + \frac{9}{2}p_3 p_2 p_1 - 2p_2^3 + \frac{3}{4}p_2^2 p_1^2 - \frac{3}{16}p_2 p_1^4 + \frac{5}{512}p_1^6$$

$f = D^2$ とおくと, $f = g \cdot g^*$ と表わされる. ここに,

$$g = \frac{1}{27}(z_4 + z_1 z_3)^3 + \frac{1}{4}\left(z_6 + \frac{1}{2}z_1^2 z_4 - \frac{1}{6}z_3^2 + \frac{1}{8}z_1^6\right)^2$$

$$g^* = \frac{1}{27}(z_4 - z_1 z_3)^3 + \frac{1}{4}\left(z_6 - \frac{1}{2}z_1^2 z_4 + \frac{1}{6}z_3^2 - \frac{1}{8}z_1^6\right)^2 . \quad *1)$$

f を不変にする Lie 環は, 下記の X_0, X_2, X_3, X_5 で生成され, $X_0^* = X_0$, $X_2^* = -X_2$, $X_3^* = X_3$, $X_5^* = -X_5$ である

	D_1	D_3	D_4	D_6
X_0	z_1	$3z_3$	$4z_4$	$6z_6$
X_1	$3z_3$	$-15\left(z_4 + \frac{3}{20}z_1^4\right)z_1$	$-6(3z_6 + z_1^3 z_3)$	$\left(4z_4^2 - \frac{9}{2}z_4 z_1^4 + \frac{11}{2}z_1^2 z_3^2 - \frac{9}{8}z_1^8\right.$
X_3	$4z_4$	$-6(3z_6 + z_1^3 z_3)$	$-15z_1^3 z_4 + 7z_1 z_3^2 - \frac{9}{4}z_1^7$	$-9z_1^3 z_6 + 11z_1^2 z_3 z_4 - z_3^3 + \frac{3}{4}z_1^6 z_3$
X_5	$6z_6$	$4z_4^2 - \frac{9}{2}z_1^4 z_4 + \frac{11}{2}z_1^2 z_3^2 - \frac{9}{8}z_1^8$	$-9z_1^3 z_6 + 11z_1^2 z_3 z_4 - z_3^3 + \frac{3}{4}z_1^6 z_3$	$6z_1^2 z_3 z_6 + 5z_1^3 z_4^2 - \frac{11}{3}z_1 z_3^2 z_4 + 2z_1^5 z_3^2 + \frac{3}{4}z_1^6 z_4 .$

$$\begin{cases} X_0 f = 24f \\ X_2 f = 0 \\ X_3 f = -36z_1^3 f \\ X_5 f = 24z_1^2 z_3 f . \end{cases}$$

$\det$ (行列) $= 2^8 3^6 f$.

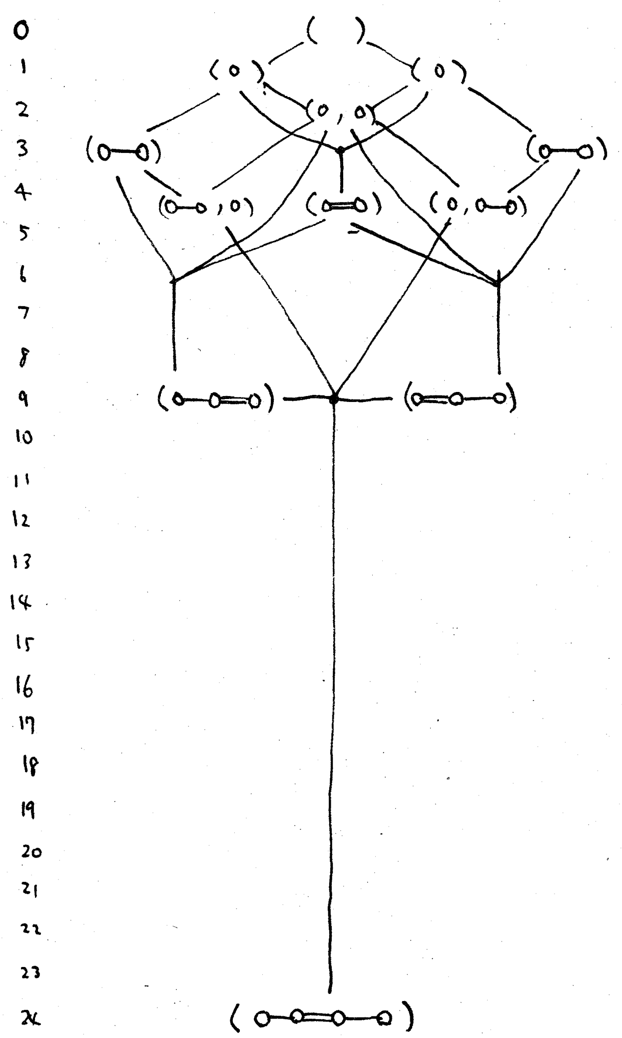
*1) $g = 3^6 D_1^2$, $g^* = -\frac{3^3}{2^6}D_2^2$.

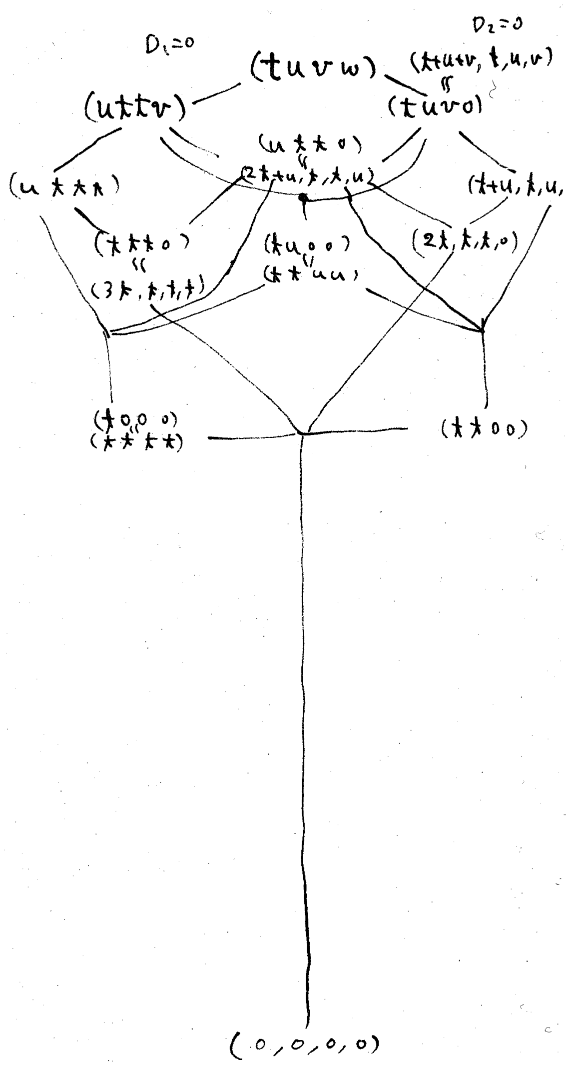
$$[X_2, X_3] = -\frac{21}{2} z_1^2 z_3 X_0 + \frac{3}{2} z_1^3 X_2 - 3 X_5$$

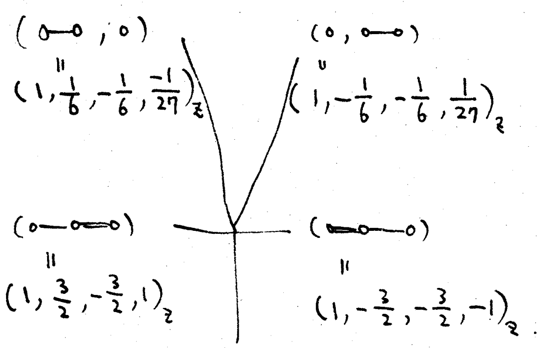
$$[X_2, X_5] = \left(-\frac{21}{2} z_1^3 z_4 + 6 z_1 z_3^2 - \frac{27}{8} z_1^7\right) X_0 + \frac{7}{2} z_1^2 z_3 X_2 + \left(3 z_4 - \frac{3}{4} z_1^4\right) X_3$$

$$[X_3, X_5] = \left(9 z_1^2 z_6 + 8 z_1 z_3 z_4 - \frac{3}{4} z_1^5 z_3\right) X_0 + \left(4 z_1^2 z_4 - \frac{2}{3} z_3^2 + \frac{3}{4} z_1^6\right) X_2$$
$$+ \frac{1}{2} z_1^2 z_3 X_3 - \frac{9}{2} z_1^3 X_5$$

(ξ_i)に対するF_4の作用は，B_4の作用と，$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ により生成される．holonomy diagram は，同種のグラフの3組ある，対称的なものである。







(diagram 左右は対でうつる)

§5 ルート系に対応しないCoxeter群.

Coxeter群で，ルート系に対応しないものが，H_3, H_4, $I_2(m)$ とある。以下に，詳しくのべることにより，実際計算の方法を示すことにする。H_3, H_4 については，詳しくのべた文献がみあたらないので，特に詳細に記す.

1. $I_2(m)$. $\circ\overset{m}{\text{———}}\circ$

$I_2(3)=A_2$, $I_2(4)=B_2$, $I_2(6)=G_2$, ($I_2(2)=D_2$ といえば)

$m=5$, $m\geq 7$ はルート系に対応しない。

$E=\mathbb{R}^2$ 内積を $(\ |\ )$ で表わし，正規直交基を $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ とする。

$\alpha=\frac{\pi}{m}$, $\quad e_k=\cos(k-\frac{1}{2})\alpha\,\varepsilon_1+\sin(k-\frac{1}{2})\alpha\,\varepsilon_2 \quad k=1,2,\cdots,2m.$

e_k $(1\leq k\leq m)$ の方向の直交鏡映を s_k とする。s_1, s_m の生成した群は，いわゆる2面体群で，$(s_1 s_m)^m=1$. これは $(e_1|e_1)=(e_m|e_m)=1$, $(e_1|e_m)=-\cos\alpha$ と対応しており，Coxeter diagram は $\underset{s_1}{\circ}\overset{m}{\text{———}}\underset{s_m}{\circ}$. これを $I_2(m)$ とよぶ. 鏡映は，$s_1, s_2, \cdots, s_m$ であり，$e_1, \cdots, e_{2m}$ が，ルート系の作用をなす.

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)s_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix}-c & s\\ -s & c\end{pmatrix}$ $\quad (\varepsilon_1,\varepsilon_2)s_m=\begin{pmatrix}-c & s\\ s & c\end{pmatrix}$ $\quad c=\cos\alpha \quad s=\sin\alpha$.

$S(E)\ni D=\prod_{k=1}^{m} e_k$ が anti-invariant. Coxeter変換 $=s_1 s_m$ であり，その位数が m, characteristic polynomial が $(T-\exp\frac{2\pi i}{m})(T-\exp\frac{2(m-1)}{m}\pi i)$ であることより，Coxeter number は m, 不変式の次数は $2, m$. である。今，$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1+i\varepsilon_2)$, $\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\varepsilon_1+i\varepsilon_2)$ とおけば，

$(\beta_1|\beta_1)=(\beta_2|\beta_2)=0 \quad (\beta_1|\beta_2)=-1.$

$(\beta_1,\beta_2)s_1 = (e^{-\alpha i}\beta_2,\ e^{+\alpha i}\beta_1)$, $(\beta_1,\beta_2)s_m = (e^{+\alpha i}\beta_2,\ e^{-\alpha i}\beta_1)$ より,

不変式は $\beta_1\beta_2$, $\beta_1^m-\beta_2^m$ である. 一方容易に,

$$(\sqrt{2}i)^{-m}D = \beta_1^m+\beta_2^m \text{ がわかるので,}$$

$$(-2)^{-m}D^2 = (\beta_1^m-\beta_2^m)^2+4(\beta_1\beta_2)^m .$$

さて, $S(E^*)$ においても, β_1,β_2 の作用によって, 不変式を求める.

$\xi_1\varepsilon_1+\xi_2\varepsilon_2 = \eta_1\beta_1+\eta_2\beta_2$ とすれば $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1-i\xi_2)$, $\eta_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}(\xi_1+i\xi_2)$

$$s_1\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\alpha i}\eta_2\\ e^{-\alpha i}\eta_1\end{pmatrix} \quad s_m\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-\alpha i}\eta_2\\ e^{\alpha i}\eta_1\end{pmatrix} .\quad \text{よって,}$$

$$x_2 = \eta_1\eta_2 \quad \left(= -\tfrac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2)\right)$$

$$x_m = \eta_1^m-\eta_2^m \quad \left(= (\sqrt{2})^m(i)^{m-1}\prod_{k=0}^{m-1}{}^{1)}(\cos k\alpha\,\xi_1-\sin k\alpha\,\xi_2)\right)$$

が invariant であり, anti-invariant は $D^* = \eta_1^m+\eta_2^m = (\sqrt{2}i)^m\prod_{k=1}^{m}(\cos(k-\frac{1}{2})\alpha\xi_1-\sin(k-\frac{1}{2})\alpha\xi_2)$ [2)]

Lie 環を求めるには, $(d\xi_1|d\xi_1)=(d\xi_2|d\xi_2)=1$, $(d\xi_1|d\xi_2)=0$ より

$$(d\eta_1|d\eta_1)=(d\eta_2|d\eta_2)=0 ,\quad (d\eta_1|d\eta_2)=-1 .$$

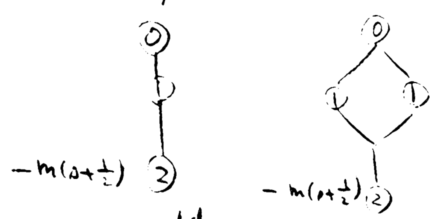
∴ $(dx_2|dx_2)=-2x_2$, $(dx_2|dx_m)=-mx_m$, $(dx_m|dx_m)=2m^2x_2^{m-1}$.

従って,

$$\boxed{\begin{aligned}X_0 &= 2x_2D_2+mx_mD_m\\ X_{m-2} &= mx_mD_2+2m^2x_2^{m-1}D_m.\end{aligned}}$$

$$-\frac{1}{m^2}\det(行列) = x_m^2+4x_2^m \quad \text{であり}, = (-2)^{-m}D^{*2}$$

holonomy diagram は下記, $b(s)=(s+1)\prod_{\mu=1}^{m-1}(s+\frac{1}{2}+\frac{\mu}{m})$.



m : odd　　m : even

m : odd ⇒ s_1 と s_m は共役,
m : even ⇒ 〃 共役でない.
これが ① の分裂に対応していることに注意せよ.

1) 2) それぞれ $(-\sqrt{2})^m i^{m-1}\prod_{k=1}^{m}(\cos k\alpha\,\xi_1+\sin k\alpha\,\xi_2)$, $(-\sqrt{2}i)^m\prod_{k=1}^{m}(\cos(k-\frac{1}{2})\alpha\xi_1+\sin(k-\frac{1}{2})\alpha\xi_2)$ とかいてよい.

2. H_3. $\circ\overset{5}{\text{——}}\circ\text{——}\circ$

四元数の標準基を $(1, i, j, k)$ とし, $u = xi + yj + zk$ の形の元からなる部分集合を E とし, $\mathbb{R}^3$ と同一視する.

$q = ai + bj + ck$ $a = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $b = \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $c = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

とおく. q の座標のあらゆる偶置換と, 座標の符号のかってなつけ方により生じた24個の元と, $\pm i, \pm j, \pm k$ との計30個の集合を R とする. (ルート系の代用品) $R \ni \alpha$ のとき, E の直交鏡映で, α を $-\alpha$ にうつすもの s_α は, $u \mapsto \alpha u \alpha$ (四元数の積) と表示しうる*. $\{s_\alpha \mid \alpha \in R\}$ の生成した, $GL(E)$ の部分群が H_3 であり, Coxeter diagram は (base $-i, q, -k$ をとり)

$$\underset{s_i}{\circ}\overset{5}{\text{——}}\underset{s_q}{\circ}\text{——}\underset{s_k}{\circ}$$

H_3 の鏡映は, R から生じる15個である.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ への作用として表示すれば, $s_i = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $s_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $s_k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$$s_q = \begin{pmatrix} b & c & -a \\ c & a & -b \\ -a & -b & c \end{pmatrix}$$

さらに, $s_q s_i s_q s_k s_i s_q = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}$ etc. $\left(\begin{matrix} x\ y\ z \\ \downarrow \\ y\ z\ x \end{matrix}\right)$

従って, 不変式は, x^2, y^2, z^2 の函数で, 巡回置換で不変, s_q で不変なものを求めればよい. $p_2 = x^2+y^2+z^2$, $p_4 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$, $p_6 = x^2y^2z^2$, $d = (x^2-y^2)(y^2-z^2)(x^2-z^2)$ とおけば, $x_2 = p_2$,

$$x_6 = 11p_6 - p_4p_2 - \sqrt{5}\,d$$

$$x_{10} = p_6(19p_4 - 13p_2^2) - p_4^2p_2 + p_4p_2^3 + \frac{3}{\sqrt{5}}(p_4 + p_2^2)\,d$$ (矢野)

* 同じく, 標準内積は $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(u\bar{v} + v\bar{u})$ と表示しうる

$$\frac{1}{4}\sum\left(\frac{\partial x_6}{\partial x}\right)^2 = 10x_{10} + 4x_2^2x_6$$

又, $d^2 = -27p_6^2 + 18p_6p_4p_2 - 4p_6p_2^3 - 4p_4^3 + p_4^2p_2^2$ を用いて,

$$\frac{1}{4}\sum\left(\frac{\partial x_6}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x_{10}}{\partial x}\right) = 70p_6^2p_2 - 454p_6p_4p_2^2 + 156p_6p_2^4 + 100p_4^3p_2 - 24p_4^2p_2^3 - 4p_4p_2^5$$

$$= -x_2(5x_6^2 + 6x_{10}x_2 + 2x_6x_2^3)$$

さらに複雑な計算により,

$$\frac{1}{4}\sum\left(\frac{\partial x_{10}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x_{10}}{\partial x}\right) = -12x_{10}x_6x_2 + 4x_{10}x_2^4 - \frac{3}{10}x_6^3 + \frac{3}{5}x_6^2x_2^3 + \frac{6}{5}x_6x_2^6$$

即ち Lie 環は,

$$\begin{cases} X_0 = x_2D_2 + 3x_6D_6 + 5x_{10}D_{10} \\ X_4 = 3x_6D_2 + (10x_{10} + 4x_2^2x_6)D_6 - x_2(5x_6^2 + 6x_{10}x_2 + 2x_6x_2^3)D_{10} \\ X_8 = 5x_{10}D_2 - x_2(5x_6^2 + 6x_{10}x_2 + 2x_6x_2^3)D_6 + (-12x_{10}x_6x_2 + 4x_{10}x_2^4 - \frac{3}{10}x_6^3 + \frac{3}{5}x_6^2x_2^3 + \frac{6}{5}x_6x_2^6)D_{10} \end{cases}$$

係数行列が rank 1 になるのは 3 種あり, 各々 codim 1 stratum に対応する. それは, $(1, 0, 0)$, $(1, \frac{2}{3^3}, \frac{-2}{3^4}) \sim (3, 2, -6)$

$(1, -\frac{2}{5}, \frac{38}{5^3}) \sim (5, -50, 19\cdot 50)$.

$$[X_0, X_4] = 2X_4, \quad [X_0, X_8] = 4X_8$$

$$[X_4, X_8] = -2x_6x_2X_4 - 4(x_6^2 + 3x_{10}x_2 + x_6x_2^3)X_0 \quad //$$

$D^{*2} = f(x)$ として, $f(x) = -250x_{10}^3 + \frac{27}{10}x_6^5 + x_2\varphi(x)$

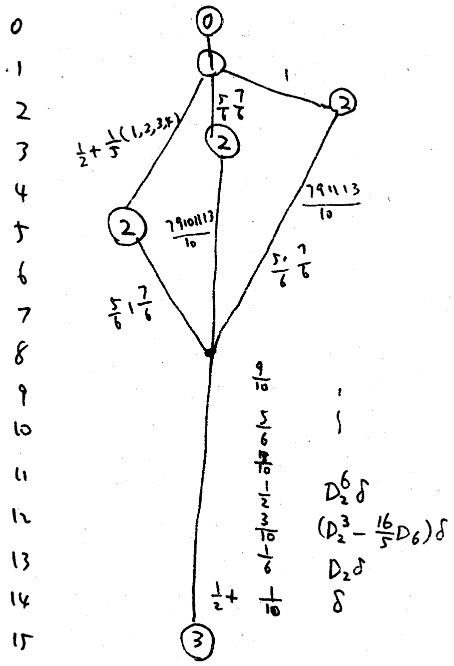
$$\varphi(x) = 4(x_2^4 - 100x_6x_2)x_{10}^2 + (-45x_6^3 - 198x_6^2x_2^3 + 4x_6x_2^6)x_{10}$$

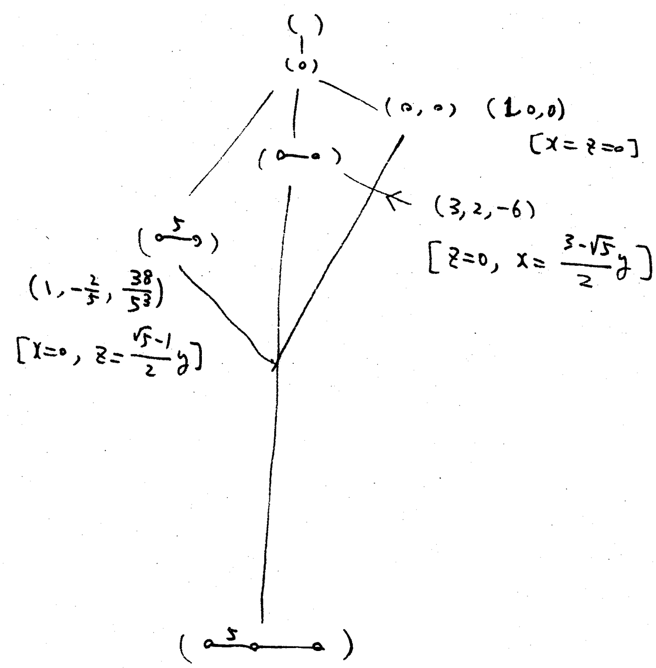
$$- \frac{158}{5}x_6^4x_2^2 - \frac{142}{5}x_6^3x_2^5 + \frac{4}{5}x_6^2x_2^8$$

$x_2 = 1$ では $x_6^2 + x_{10}^2$ になる.

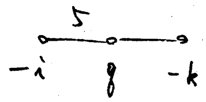
$X_0f = 15f$, $X_4f = -2x_2^2f$, $X_8f = (-20x_6x_2 + 2x_2^4)f$.

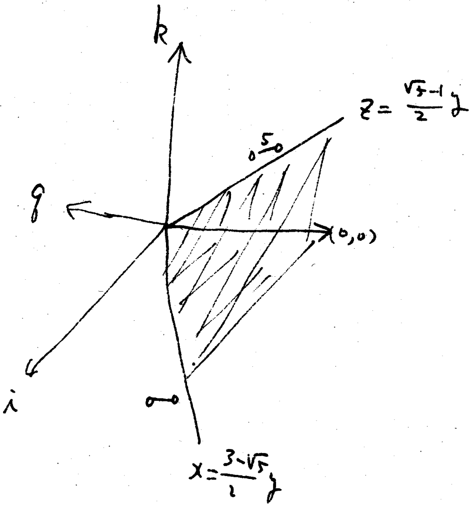
H_3





$$b=(s+1)\prod_{1}^{5}\left(s+\frac12+\frac{\nu}{6}\right)\prod_{1}^{9}\left(s+\frac12+\frac{\nu}{10}\right)$$

chamber 



H_3 は次の様にも表現される。$\mathfrak{A}_5$ を5次交代群とする。(ab) を a と b の互換をあらわすとし、$r_1=(14)(23)$, $r_2=(12)(45)$, $r_3=(12)(34)$ とおく。

$$(r_1r_2)^5=(r_2r_3)^3=(r_1r_3)^2=1$$

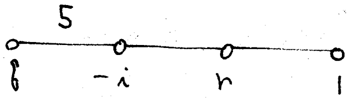
であり、従って Coxeter 群の universality より homomorphism $f: H_3\to\mathfrak{A}_5$ が存在する。$\varepsilon: H_3\to\{\pm1\}$ を $w\mapsto(-)^{l(w)}$ (ここに $l(w)$ は w の最短表示の長さ)とすれば、同型

$$(f,\varepsilon): H_3\to\mathfrak{A}_5\times\{\pm1\}$$

を得る。正20面体(正12面体)の回転群は $\mathfrak{A}_5$ と同形であるが、上の $H_3\simeq\mathfrak{A}_5\times\{\pm1\}$ における $\mathfrak{A}_5$ がそれを表わしている。即ち H_3 は、正12(20)面体の(うらがえしを含めた)合同群である。次の H_4 も、同様に、4次元における正120面体(正12面体120個)、正600面体(正4面体600個, 120頂点)にかかわる。

正多面体とCoxeter群との関連については、最後にくわしくてある。

3. H_4



$q = ai + bj + ck$, $\quad a = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $b = \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $c = \frac{1}{2}$.

$r = \frac{1}{2}(-1+i+j-k)$.

$\xi_1 + \xi_2 i + \xi_3 j + \xi_4 k$ に対する作用として, H_4 は,

$\{\xi_i\}$ の偶置換と, $\xi_i \mapsto \pm\xi_i$, さらに, r, q に対応する,

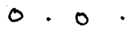
$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & b & c & -a \\ & c & a & -b \\ & -a & -b & c \end{pmatrix}$$

により生成される.

次元1の diagram

はそれぞれ異なる. 次元2のものは,

$(t, 0, t+u, u)$ $\quad (0, t, u, t+u)$ $\quad (0, 0, t, u)$ $\quad (0, t, u, -2(at+bu))$



$((2a+1)t + (2b+1)u, t, u, -2(at+bu))$ である. このうち

第2のものと第3のものは, 偶置換でうつり等しい.

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ u \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ bt+cu \\ ct+au \\ -at-bu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \\ U \\ 2(aT+bU) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \\ -2(at+bu) \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} (2a+1)t + (2b+1)u \\ t \\ u \\ 2(at+bu) \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} t+u \\ (2a+1)t + 2bu \\ 2at + (2b+1)u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(aT+bU) \\ U \\ T \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \\ -2(at+bu) \end{pmatrix}$$

により, 終りの3つもひとしい. (実際はこのようにしてしらべることはないが)

codim 1 のものは, Coxeter diagram が奇数の線で結ばれているので, (o) のみである. 従って, この場合, (H4, S) の S の subset で生成された群は, その diagram が同じであれば, 共役である.

基本不変式は weight (2, 12, 20, 30) である.

$z_2 = \xi_1^2+\cdots+\xi_4^2$.

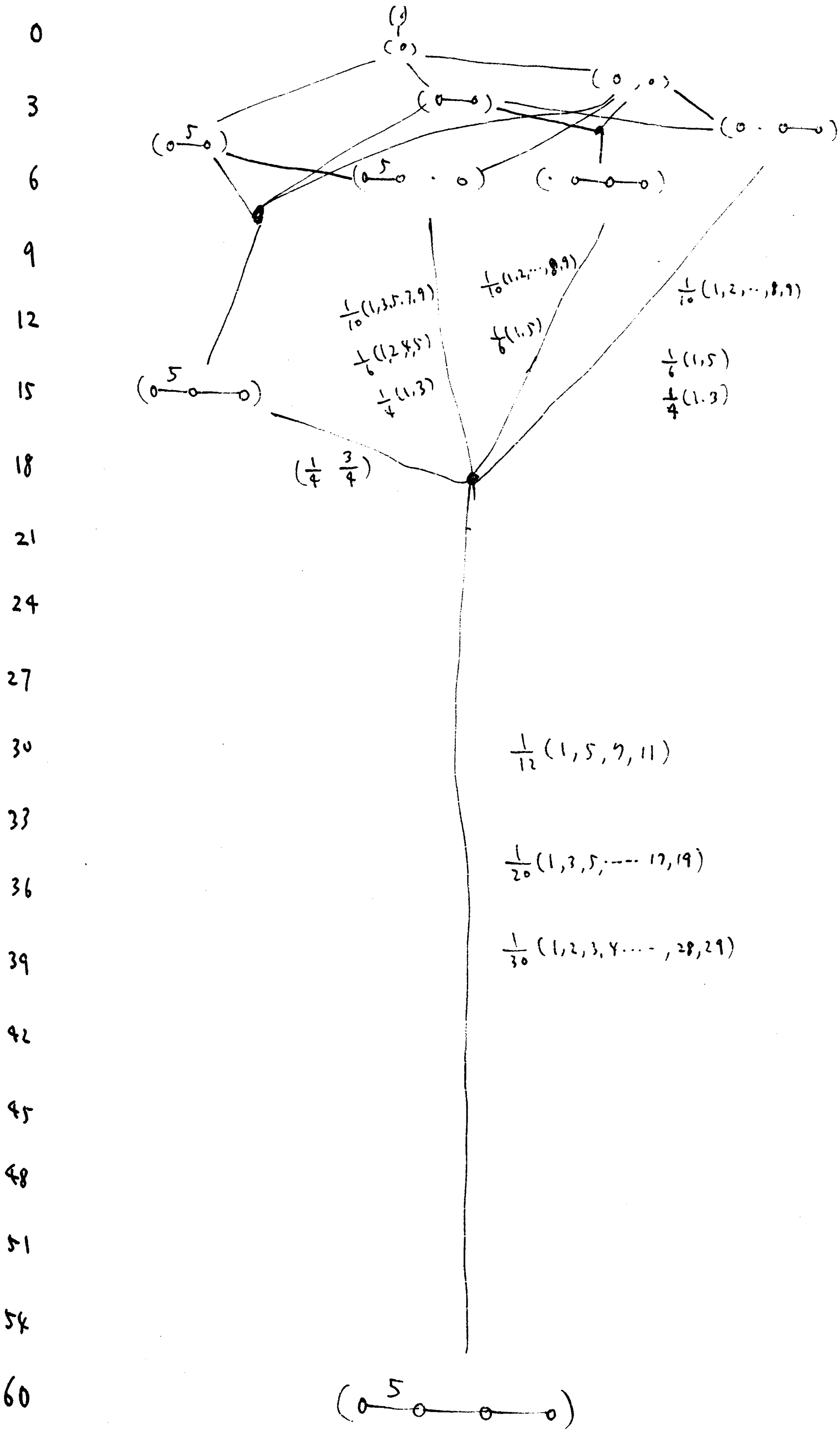
z_{12} は $d=\prod_{i<j}(\xi_i^2-\xi_j^2)$ が関係してくる.

$z_{12} = (p_8p_4,\ p_8p_2^2,\ p_6^2,\ p_6p_4p_2,\ p_4^3,\ p_4^2p_2^2,\ p_4p_2^4,\ p_2^6,\ d)$

ここで $p_{2\nu}$ は ξ_i^2 の ν 次基本対称式.

尚, 1, ξ, r から, あらゆる座標の偶置換と, 符号±のつけかえから得られる集合を Q とすれば, Q は 120元からなり, norm 1 の四元数の有限部分群をなす. Q は, ルート系にかわる役割をはたしている.

H4


0
3
6
9
12
15
18
21
24
27
30
33
36
39
42
45
48
51
54
60
1/10 (1,3,5,7,9)
1/6 (1,2,4,5)
1/4 (1,3)
1/10 (1,2,...,8,9)
1/6 (1,5)
1/10 (1,2,...,8,9)
1/6 (1,5)
1/4 (1,3)
(1/4 3/4)
1/12 (1,5,7,11)
1/20 (1,3,5,---- 17,19)
1/30 (1,2,3,4.... ,28,29)

正多面体との関連

H_3, H_4は，3，4次元において，特別な正多面体の存在とかかわっている。次に，正多面体の一覧表をしるす.

2次元	Coxeter群	Dynkin diagram	各面	の diagram	つまり	
正3角形	A_2			A_1	線分	
正4角形	B_2			〃	〃	
正6角形	G_2			〃	〃	
正m角形	$I_2(m)$	m		〃	〃	
3次元						回転群
正4面体	A_3			A_2	正3角形	$\mathfrak{A}_4$
正6面体	B_3			B_2	正4角形	$\mathfrak{S}_4$
正8面体	B_3	C_3		A_2	正3角形	
正12面体	H_3	5	5	$I_2(5)$	正5角形	$\mathfrak{A}_5$
正20面体	H_3	5		A_2	正4角形	
4次元						
正5面体	A_4			A_3	正4面体	
正8面体	B_4			B_3	正6面体	
正16面体	B_4	C_4		A_3	正4面体	
正24面体	F_4		C_3	B_3	正8面体	
正120面体	H_4	5	5	H_3	正12面体	
正600面体	H_4	5		A_3	正4面体	

n次元 ($n \geq 5$)　　　　　　　　　　　　面.

正$n+1$面体	○—○—○···○—○	A_n	○—○—○···—○	A_{n-1}	正n面体
正$2n$面体	○—○—○···○⇒○	B_n	○—○—○···○⇒○	B_{n-1}	正$2(n-1)$面体.
正2^n面体	○—○—○···○⇐○ C_n	B_n	○—○—○···○—○	A_{n-1}	正n面体 //

ルート系に対応するものにおいては，その Dynkin diagram で長さの長いルートの端の一個をはずしたものが，各面の diagram になる。H_3, H_4 では，どちらの端をはずすかによって，異なる多面体と対応する。Coxeter群として同じものは互いに双対的．特に，Coxeter diagram が左右対称なものは自己双対.

[1] N. Bourbaki : Lie 群と Lie 環 3. Chap 4.5.6.

[2] T. Yano : Theory of b-functions (to appear in Publ. of RIMS)

[3] K. Saito : Discriminant Loci

Appendix

GL(2) の不変式に由来する, simple な多項式について.

§1. Introduction.

$$x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + x_2 t^{n-2} + \cdots + x_{n-1} t + x_n$$

の判別式 $\Delta(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ は $n=2,3$ の時, $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点 conormal において simple である. $n \geq 4$ では, monic ($x_0=1$) にした上, $x_1=0$ とおく (A_{n-1}), x_n を導ず (B_n) $x_n = x_{\frac{n}{2}}^2$ とする (D_n) ことにより, simple となった。その事情は, Δ を不変にする Lie 環をみれば, よく説明される。

例 ($n=4$) $\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ を不変にする Vector fields.

X_{-1}	X_0'	X_0	X_1	X_2	
	$4x_0$		x_1	$2x_0x_2$	D_0
$4x_0$	$3x_1$	x_1	$2x_2$	$3x_0x_3 + x_1x_2 + 3x_3x_0$	D_1
$3x_1$	$2x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$4x_0x_4 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 + 4x_4x_0$	D_2
$2x_2$	x_3	$3x_3$	$4x_4$	$3x_1x_4 + x_3x_2 + 3x_4x_1$	D_3
x_3		$4x_4$		$2x_4x_2$.	D_4

初め4つは GL(2) の作用から生じている。もう一つは discriminant の特殊性より生じている。上の行列の det. は Δ に等しく, 従って Δ を不変にする Vector fields はこれらが free basis になっている。

$\Delta(1, x_1, x_2, x_3)$ に作用するようにするためには D_0 の係数を (x_0-1) の倍数にしなければならない.

$$X_1 + x_1\left(X_0 - \frac{1}{4}(X_0' + X_0)\right) = x_1(x_0-1)D_0 + 2\overset{x_0}{x_2}D_1 + (3\overset{x_0}{x_3} + x_1x_2)D_2 + (4\overset{x_0}{x_4} + 2x_1x_3)D_3 + 3x_1x_4D_4.$$

$$\frac{1}{2}\left\{X_2 + x_2\left(X_0 - \frac{1}{2}(X_0' + X_0)\right)\right\} = 0\,D_0 + 3x_0x_3D_1 + (4x_0x_4 + 2x_1x_3)D_2 + (3x_1x_4 + x_2x_3)D_3 + 2x_2x_4D_4.$$

従って,

$\boxed{x_0 = 1 とし て}$

4	x_1	$2x_2$	$3x_3$
$3x_1$	$2x_2$	$3x_3 + x_1x_2$	$4x_4 + 2x_1x_3$
$2x_2$	$3x_3$	$4x_4 + 2x_1x_3$	$3x_1x_4 + x_2x_3$
x_3	$4x_4$	$3x_1x_4$	$2x_2x_4$.

—(*)

ここで第1列を x_4 倍すれば, B_4 の Lie 環をうる。それにさらに $x_4 = x_2'^2$ とおけば, D_4 へ−つをうる。 A_3 を求めるには, D_1 の係数を x_1 の倍数にした上で, $x_1 = 0$ とおく(実際は D_1 の係数を0にする)その操作には上の第1列を用いればよい。

当初求めの例 $n=4$ は n が偶数のため X_2 が2重に重った形である.

例 $n=5$.

X_{-1}	X_0'	X_0	X_1	X_2	X_3
	$5x_0$		x_1	$2x_0x_2$	
$5x_0$	$4x_1$	x_1	$2x_2$	$3x_0x_3 + x_1x_2$	$4x_4x_0$
$4x_1$	$3x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$4x_0x_4 + 2x_1x_3$	$3x_4x_1 + 5x_5x_0$
$3x_2$	$2x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_0x_5 + 3x_1x_4$	$2x_4x_2 + 4x_5x_1$
$2x_3$	x_4	$4x_4$	$5x_5$	$4x_1x_5$	$x_4x_3 + 3x_5x_2$
x_4		$5x_5$			$2x_5x_3$ //

§2.

以下 $p(t) = t^n + x_1 t^{n-1} + \cdots + x_n = \prod (t-\xi_i)$ とおく.

$\mathbb{C}^n_\xi \xrightarrow{/\mathfrak{S}_n} \mathbb{C}^n_x$ と対称群の作用による,

商空間になっている。y_1, y_2, y_n を (ξ_i) の ν 次冪和とすれば,

$(x_1, \ldots, x_n)$ と $(y_1, \ldots, y_n)$ は *bi-holomorphic* に変換される.

実際, $\dfrac{p'(t)}{p(t)} = \sum \dfrac{1}{t-\xi_i} = \sum\limits_{\nu \geq 0} \dfrac{y_\nu}{t^{\nu+1}} \quad (y_0 = n)$ より,

$$n t^{n-1} + (n-1)x_1 t^{n-2} + \cdots + x_{n-1} = (t^n + x_1 t^{n-1} + \cdots + x_n) \sum_{\nu \geq 0} \frac{y_\nu}{t^{\nu+1}}$$

の両辺を比較して, (x) と (y) の変換の式を得ることができる。

Prop. 1 $\mathbb{C}^n_\xi$ 上の $\overbrace{\text{vector field}}^{\text{meromorphic}}$ $\sum a_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ が, $\mathfrak{S}_n$ 不変かつ $\mathbb{C}^n_x$ で *holomorphic* な vector field であるとせよ。このとき

$\exists A(t; t_1, \ldots, t_{n-1})$: *holomorphic*, symmetric in $(t_1, \ldots, t_{n-1})$

s.t. $a_i(\xi) = A(\xi_i; \xi_1 \overset{\vee}{\cdots} \xi_n) / p'(\xi_i)$

∵) y-coordinate で行なう. $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ & \cdots & & \\ 1 & \xi_n & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ 2\frac{\partial}{\partial y_2} \\ \vdots \\ n\frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix}$ より,

$\sum a_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \sum b_i(y) \left(i \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$ であれば,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & & \xi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

これより明らか. □

特に、 $X_\nu = \sum \xi_i^{\nu+1}\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ には、 $\sum_{i=1}^{n} y_{\nu+i}\left(i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ が対応する。このうち、 X_{-1}, X_0, X_1 は、GL(2) に由来するものである。
$[X_\mu, X_\nu] = (\nu-\mu)X_{\mu+\nu}$ であり、特に、 X_ν ， $\nu\geq 2$ は、 X_1, X_2 から inductive に $X_{\nu+1} = \frac{1}{\nu-1}[X_1, X_\nu]$ と表わされていると考えてよい。

$$X_{n+\mu} + x_1 X_{n+\mu-1} + \cdots + x_n X_\mu = 0 \qquad (1)$$

という関係があり、 $X_{-1}, X_0, X_1, \cdots\cdots, X_{n-2}$ が独立である。

$$\begin{cases} e^{tX_\nu} f(\xi) = f\left(\dfrac{\xi}{\sqrt[\nu]{1-\nu t\xi^\nu}}\right) & \nu\geq 1, \\ e^{tX_0} f(\xi) = f((1+t)\xi) \quad , \quad e^{tX_{-1}} f(\xi) = f(\xi+t) . \end{cases} \qquad (2)$$

GL(2) の適当な不変式 $\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ があり、 $\varphi(1, x_1, \cdots, x_n)$ を不変にする Lie 環が、discriminant のごとく、 $X_{-1}, X_0, X_1, X_2', X_3', \cdots, X_{n-2}'$ という weight ν の作用素 X_ν' により自由生成されているものは、どの程度存在するであろうか。ここで X_ν' $\nu\geq 3$ は、generic には $X_{\nu+1}' = \frac{1}{\nu-1}[X_1, X_\nu']$ により X_2' から作られていると考えてよい。 X_ν' $\nu\geq n-1$ も上式により inductive に定義して、次の式が成立することを要求する。

$$a_0 X_{n-1} + a_1(\xi) X_{n-2} + \cdots + a_{n-1}(\xi) X_0 + a_n(\xi) X_{-1} = 0 . \qquad (3)$$

ここに $a_\nu(\xi)$ は (ξ) の斉 ν 次対称多項式である。

我々の求める Lie 環は、本質的には X_2' のとり方に従う。

X_2' を $X_2 + Y_2$ の形のもので探すとしよう。ここで

X_2 は discriminant のものであり、付加項 Y_2 は Prop. 1 により

$Y_2 = \sum \frac{A(\xi_i ; \xi_1 \cdots \overset{i}{\vee} \cdots \xi_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ の形でなければならないが、実は

より強く、

$$Y_2 = \sum \frac{A(\xi_i - \xi_1, \cdots, \overset{i}{\vee}, \cdots, \xi_i - \xi_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \qquad (4)$$

であると仮定してよい。実際、$[X_{-1}, \ ]$ についての閉性より、

$$[X_{-1}, Y_2] = aX_1 + bx_1X_0 + (cx_2 + dx_1^2)X_{-1}$$

となっていなければならないが、

$$Y_2' = Y_2 - \frac{a}{n}x_1X_1 - \left(b - \frac{2a}{n}\right)x_2X_0 - \frac{d}{n-1}x_1x_2X_{-1}$$
$$+ \left(-c + \left(b - \frac{2a}{n}\right) + \frac{n}{n-1}d\right)x_3X_{-1}$$ ととれば、

$[X_{-1}, Y_2'] = 0$. i.e. Y_2' は translation invariant であり、(4) の形である。

記号まとめ $\overset{\circ}{X}_\nu = \sum \xi_i^{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$,

$X_\nu = \overset{\circ}{X}_\nu$ $\nu = -1, 0, 1$.

$X_2 = \overset{\circ}{X}_2 + Y_2$, $Y_2 = \sum \frac{\hat{A}_{n+2}(\xi_i - \xi_1, \cdots, \overset{i}{\vee}, \cdots, \xi_i - \xi_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$,

$A_{n+2}(t_1, \cdots, t_{n-1})$ は (t) につき homogeneous $n+2$ 次の対称多項式.

$X_{\nu+1} \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\nu-1}[X_1, X_\nu]$ $\nu \geq 2$ とおく.

Prop. ① $[X_\mu, X_\nu] = (\nu - \mu)X_{\nu+\mu}$ $\mu = -1, 0, 1,$ $\nu = -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots$

② $X_\nu = \overset{\circ}{X}_\nu + Y_\nu$

$$Y_\nu = \sum \frac{A_{n+\nu}(\xi_i;\xi_1 \cdots \overset{i}{\vee} \cdots \xi_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$ ただしここで

$A_{n+\nu}(\xi_1;\xi_2,\cdots,\xi_n)$ は $\xi_1,\cdots,\xi_n$ について斉 $n+\nu$ 次多項式，

$(\xi_2\cdots\xi_n)$ について symmetric であり，次の様に定義される。

$$A_{n+\nu}(\xi_1;\xi_2,\cdots,\xi_n) = \begin{cases} 0 & \nu=-1,0,1 \\ \dfrac{1}{(\nu-2)!} L^{\nu-2} A_{n+2}(\xi_1-\xi_2,\cdots,\xi_1-\xi_n) & (\nu \geq 2) \end{cases} \qquad (6)$$

$$L = X_1 - n\xi_1 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j .$$

∵) induction により明らか。 □

我々の要請 (3) に $[X_{-1},\ ]$ を行い， $Y_{n-2},\cdots,Y_{-1}$ が独立であることを用いれば，

$$a_\nu(\xi) = \frac{(-)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} (X_{-1})^{n-\nu} a_n(\xi) \qquad (7)$$

又，(3) の $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$ の係数をみて，

$$a_0 A_{2n-1} + a_1 A_{2n-2} + \cdots + a_{n-3} A_{n+2}$$
$$= -\left(\sum_{\mu \geq 0} a_\mu \xi_1^{n-\mu}\right)(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n) . \qquad (8)$$

即ち必要条件として

$$\left(\frac{a_0}{(n-3)!} L^{n-3} + \frac{a_1}{(n-4)!} L^{n-4} + \cdots + a_{n-3}\right) A_{n+2}(\xi_1-\xi_2,\cdots,\xi_1-\xi_n)$$
$$= -\left(\sum_{\mu \geq 0} a_\mu \xi_1^{n-\mu}\right) p'(\xi_1) \qquad (9)$$

$$L = \xi_1^{n+1}\xi_2\cdots\xi_n X_1 \xi_1^{-(n+1)-1}\xi_2^{-1}\cdots\xi_n^{-1}$$ より

$$e^{tL}f(\xi) = \xi_1^{n+1}\xi_2\cdots\xi_n\, e^{tX_1}\frac{f(\xi)}{\xi_1^{n+1}\xi_2\cdots\xi_n}$$

$$= \xi_1^{n+1}\xi_2\cdots\xi_n\, f\left(\frac{\xi}{1-t\xi}\right)\frac{(1-t\xi_1)^{n+1}(1-t\xi_2)\cdots(1-t\xi_n)}{\xi_1^{n+1}\xi_2\cdots\xi_n}$$

$$= (1-t\xi_1)^n \prod_{i=1}^{n}(1-t\xi_i)\, f\left(\frac{\xi}{1-t\xi}\right)$$

又, $e^{-tX_{-1}}g(\xi) = g(\xi - t) = \sum \frac{(-t)^k}{k!}(X_{-1})^k g(\xi)$

$f = A_{n+2}$ か $g = a_n$ に適用して, (前式で $t \to 1/t$ にする)

$$a_n(\xi - t)\quad (1-\frac{\xi_1}{t})^n \prod (1-\frac{\xi_i}{t})\, A_{n+2}\left(\frac{t\xi}{t-\xi}\right)$$

$$= \sum t^\ell a_{n-\ell}(\xi)\sum \frac{t^{-k}(L^k A_{n+2})}{k!}$$

$$= \sum t^h \sum a_{n-\ell}(\xi)\frac{(L^{\ell-h}A_{n+2})}{(\ell-h)!}$$ よって $\underline{h=3}$ の係数は

(9) の左辺に一致し, (上式左辺) $= a_n(\xi - t)\, t^4 \frac{\prod_2^n (t-\xi_i)}{t-\xi_1} A_{n+2}\left(\frac{\xi_2-\xi_1}{t-\xi_2}, \ldots, \frac{\xi_n-\xi_1}{t-\xi_n}\right)$

$$\sum a_\mu \xi_1^{n-\mu} = \sum \frac{(-\xi_1)^{n-\mu}}{(n-\mu)!}(X_{-1})^{n-\mu}a_n(\xi) = a_n(\xi - \xi_1)$$ より

$$\operatorname*{Res}_{t\to\infty} a_n(t-\xi_1, \ldots, t-\xi_n)\left(1 + (-)^n \prod_2^n \frac{t-\xi_i}{\xi_1-\xi_i} A_{n+2}\left(\frac{\xi_1-\xi_2}{t-\xi_2}, \ldots, \frac{\xi_1-\xi_n}{t-\xi_n}\right)\right)\frac{dt}{t-\xi_1} = 0 \quad \text{---(10)}$$

これは明らかに特殊解 $a_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_1 \cdots \xi_n$

$A_{n+2}(\xi_1-\xi_2, \ldots, \xi_1-\xi_n) = (\xi_1-\xi_2, \ldots, \xi_1-\xi_n)$ の基本対称式の斉2次式

(i.e. $\bar{p}_3 \cdot \bar{p}_{n-1}$, $\bar{p}_4 \cdot \bar{p}_{n-2} \cdots$) をもつ.

ここで $\underline{\bar{p}_3 \cdot \bar{p}_{n-1}}$ をとれば, 初めの Y_2 のとり方から, Y_2 が X_2

X_1 X_0 X_{-1} で表示されるなら, $\underline{\text{不要である。}}$

実は $a_n=\xi_1\cdots\xi_n$ ととるとき，(10) をみたす A_{n+2} は上にのべたものしかないことがわかる。変数変換 $\eta_1=\xi_1,\ \eta_2=\xi_1-\xi_2,\ \dots,\ \eta_n=\xi_1-\xi_n$ を行う。

$$L=\eta_1^2\frac{\partial}{\partial\eta_1}+2\eta_1M-N \qquad \left(\begin{array}{l} M=\eta_2D_2+\cdots+\eta_nD_n-n \\ N=(\eta_2^2D_2+\cdots+\eta_n^2D_n)-\sum_2^n\eta_i \end{array}\right.$$

$M-2$，$\frac{\partial}{\partial\eta_1}$ は A_{n+2} を零化する．

$$L^\nu\equiv\sum_{\mu=0}^{\nu}c_{\nu,\mu}t^{\nu-\mu}N^\mu \mod \mathcal{D}(M-2)+\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial\eta_1} \qquad (11)$$

$c_{00}=1$， $c_{\nu,\mu}=c_{\nu-1,\mu-1}+(\nu+\mu)c_{\nu-1,\mu}$.

($L^0\equiv1$， $L^1\equiv4\eta_1-N$， $L^2\equiv20\eta_1^2-10\eta_1N+N^2$， $L^3\equiv120\eta_1^3-90\eta_1^2N+18\eta_1N^2-N^3,\cdots$)

今 $a_n=(-)^n\xi_1\cdots\xi_n$ ととれば， $a_\mu=x_\mu=(-)^\mu$($\xi_1\cdots\xi_n$ の μ 次基本対称式)

従って， $a_\mu|_{\xi_1=0}$ = ($\eta_2,\dots,\eta_n$ の μ 次基本対称式) $=\bar{p}_\mu$

$$\sum a_\mu\xi_1^{n-\mu}=0.$$

よって，(9) は， $\xi_1=0$ では[+]

[+](実は一般に(9)の左辺の作用素は η_1 を含まない)

$$\left(\frac{1}{(n-3)!}(-N)^{n-3}+\frac{\bar{p}_1}{(n-4)!}(-N)^{n-4}+\cdots+\bar{p}_{n-3}\right)A_{n+2}(\eta_2,\dots,\eta_n)=0. \qquad (12)$$

この( )内の作用素は， $\frac{(-)^{n-3}}{(n-3)!}(N-\bar{p}_1)^{n-3}$ であることが容易にわかる。 $N-\bar{p}_1=-\left(2\bar{p}_2\frac{\partial}{\partial\bar{p}_1}+\cdots+(n-1)\bar{p}_{n-1}\frac{\partial}{\partial\bar{p}_{n-2}}\right)+\bar{p}_1\left(\bar{p}_1\frac{\partial}{\partial\bar{p}_1}+\cdots+\bar{p}_{n-1}\frac{\partial}{\partial\bar{p}_{n-1}}-2\right)$ を用いて， $(N-\bar{p}_1)^{n-3}B(\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_{n-1})=0$ の解は $\bar{p}_\nu$ の特殊な2次式になることがわかり(すべての解をexplicitに定められる)特に weight $n+2$ 以上の任意の2次式が解になることがわかる。(他に weight $n, n+1$ の特殊なものがある。)

さて、(3)を要請するとき、実は $a_n = x_n$ とみてよいことがわかる。今、$a_1, \dots, a_n$ は函数的に独立と仮定せよ。このとき、(3) に $[X_{-1}, \ ]$ $[X_0, \ ]$ $[X_1, \ ]$ をほどこせば、

$$\begin{cases} X_{-1} = nD_{a_1} + (n-1)D_{a_2} + \cdots + D_{a_n} \\ X_0 = a_1 D_{a_1} + 2a_2 D_{a_2} + \cdots + n a_n D_{a_n} \\ X_1 = (a_1^2 - 2a_2) D_{a_1} + \cdots\cdots \end{cases}$$

となり、(x_ν) に対する X_{-1}, X_0, X_1 の表示と全く等しい。よって、これに X_2 を加えて Lie 環を構成するにあたっては、$a_\nu = x_\nu$ としてよい。

以上をまとめて、我々は次の場合を考えればよい。

「X_{-1}, X_0, X_1 は discriminant と同じ、$X_2 = \mathring{X}_2 + Y_2$

$$Y_2 = \sum \frac{A_{n+2}(\eta_2, \dots, \eta_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

ここに $A_{n+2}(\eta_2, \dots, \eta_n)$ は、$(\eta_2, \dots, \eta_n)$ の基本対称式を $\bar{p}_\nu$ として、$\bar{p}_4 \cdot \bar{p}_{n-2}$, $\bar{p}_5 \cdot \bar{p}_{n-3}, \dots$ の一次結合。

$$X_{\nu+1} \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\nu - 1}[X_1, X_\nu] \qquad \nu \geq 2$$ と定義したとき、

$X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_{n-2}$ が Lie 環をなす。」

recursion formulaは $X_{n-1} + x_1 X_{n-2} + \cdots + x_n X_{-1} = 0$.

時に、$n \geq 6$ でしか、我々の求める新しい Lie 環はあらわれないことがわかった。$n=6$ の場合は、実際に存在する。それは、もともと $(GL(5) \times SL(4), 日 \otimes □)$ のある orbit への localization から見出されたものである。

(SL(5)×GL(4); 日⊗口) において, point

$$e_1\wedge e_3\otimes e_7 + e_4\wedge e_5\otimes e_7 + e_2\wedge e_5\otimes e_8 + e_3\wedge e_4\otimes e_8 + e_1\wedge e_4\otimes e_9 + e_2\wedge e_3\otimes e_9$$

は codimension 7 の orbit の generic point である。この点での transversal な方向として,

$$\left(x_0\, e_3\wedge e_5 + \tfrac{1}{3}x_1\, e_1\wedge e_5 + \tfrac{2}{3}x_2\, e_1\wedge e_3 + x_3\, e_2\wedge e_5 + \tfrac{4}{3}x_4\, e_2\wedge e_3 - \tfrac{4}{3}x_5\, e_1\wedge e_2 + 8x_6\, e_2\wedge e_4\right)\otimes e_6$$

をとれば, 不変式の localization は次の 7×7 行列の行列式で与えられ, $X_{-1}, X_0', X_0, X_1, X_2, X_3, X_4$ はそれを不変にする Lie 環の free basis である.

7'''

	X_{-1}	X_0'	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
D_0		$6x_0$		x_1	$-\frac{1}{3}x_0x_2+\frac{1}{9}x_1^2$	$\frac{1}{9}x_1x_2$	$\frac{1}{9}x_2^2-\frac{1}{3}x_1x_3+\frac{4}{3}x_0x_4$
D_1	$6x_0$	$5x_1$	x_1	$2x_2$		$\frac{1}{2}x_1x_3$	$4x_0x_5$
D_2	$5x_1$	$4x_2$	$2x_2$	$3x_3$	x_0x_4	$2x_1x_4-5x_0x_5$	$9x_0x_6+x_1x_5$
D_3	$4x_2$	$3x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$\frac{10}{3}x_0x_5+\frac{2}{9}x_1x_4$	$\frac{4}{9}x_1x_5-16x_0x_6-\frac{1}{2}x_3^2+\frac{16}{9}x_2x_4$	$\frac{10}{3}x_1x_6+\frac{2}{9}x_2x_5$
D_4	$3x_3$	$2x_4$	$4x_4$	$5x_5$	$9x_0x_6+x_1x_5$	$2x_2x_5-5x_1x_6$	x_2x_6
D_5	$2x_4$	x_5	$5x_5$	$6x_6$	$4x_1x_6$	$\frac{1}{2}x_3x_5$	
D_6	x_5		$6x_6$		$\frac{1}{9}x_4^2-\frac{1}{3}x_3x_5+\frac{4}{3}x_2x_6$	$\frac{1}{9}x_4x_5$	$-\frac{1}{3}x_4x_6+\frac{1}{9}x_5^2$.

この式を $g(x_0, x_1, x_2, \dots, x_6)$ とすれば, 初めの4つの作用までからわかるように $\underline{GL(2)}$ invariant である。

$g(1, 0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ は, 次の Lie 環の作用で不変, である。(尚, $x_6 g(1, x_1 \cdots x_6)$, $g(1, x_1, \dots, x_5, x_3'^2)$ などは X_2 の D_6 の係数

をみれば $\frac{1}{9}x_4^2$ があり，これが消去できないため，一次の作用素のみでsimpleにすることは不可能である。)

⑤''

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_5$	$6x_6$
$3x_3$	$4x_4-\frac{4}{3}x_2^2$	$\frac{40}{3}x_5-\frac{2}{3}x_2x_3$	$16x_6+\frac{1}{2}x_3^2-\frac{16}{9}x_2x_4$	$-\frac{8}{9}x_2x_5+\frac{1}{9}x_3x_4$
$4x_4$	$5x_5-x_2x_3$	$36x_6-\frac{4}{3}x_2x_4$	$-2x_2x_5$	$\frac{4}{9}x_4^2-\frac{4}{3}x_3x_5+\frac{8}{3}x_2x_6$
$5x_5$	$6x_6-\frac{2}{3}x_2x_4$	$-2x_2x_5$	$-\frac{1}{2}x_3x_5$	$-\frac{1}{9}x_4x_5$
$6x_6$	$-\frac{1}{3}x_2x_5$	$\frac{4}{9}x_4^2-\frac{4}{3}x_3x_5+\frac{8}{3}x_2x_6$	$-\frac{1}{9}x_4x_5$	$-\frac{10}{27}x_5^2+\frac{8}{9}x_4x_6+\frac{8}{27}x_2^2x_6$ $+\frac{2}{81}x_2x_4^2+\frac{-2}{27}x_2x_3x_5$.

$[X_1, X_2] = -4X_3 + \frac{-2}{3}x_2X_1$

$[X_1, X_3] = -3X_4 + \frac{1}{3}x_2X_2 + \frac{-1}{2}x_3X_1 + \frac{1}{3}x_4X_0$

$[X_1, X_4] = \frac{1}{6}x_3X_2 + \frac{-1}{3}x_4X_1 + \frac{1}{3}x_5X_0$

$[X_2, X_3] = -\frac{2}{3}x_2X_3 + \frac{2}{3}x_5X_0$

$[X_2, X_4] = \frac{2}{9}x_4X_2 + \frac{-8}{9}x_5X_1 + \frac{8}{3}x_6X_0$

$[X_3, X_4] = \frac{1}{9}x_4X_3 + \frac{-1}{9}x_5X_2.$

$[X_0, X_\nu] = \nu X_\nu.$

$X_0f = 30f$ ，$X_1f = 0$，$X_2f = -\frac{4}{3}x_2f$ ，$X_3f = x_3f$ ，$X_4f = (2x_4+\frac{8}{27}x_2^2)f$

次に6次式の判別式の場合をしるす．上の⑤''の行列は，一部分対象でないことに注意せよ。(cf. p.) 又，X_4に3次の項がある。

$\Delta(1, 0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_5$	$6x_6$
$3x_3$	$4x_4 - \frac{4}{3}x_2^2$	$5x_5 - x_2x_3$	$6x_6 - \frac{2}{3}x_2x_4$	$-\frac{1}{3}x_2x_5$
$4x_4$	$5x_5 - x_2x_3$	$6x_6 + 2x_2x_4 - \frac{3}{2}x_3^2$	$3x_2x_5 - x_3x_4$	$4x_2x_6 - \frac{1}{2}x_3x_5$
$5x_5$	$6x_6 - \frac{2}{3}x_2x_4$	$3x_2x_5 - x_3x_4$	$4x_2x_6 + 2x_3x_5 - \frac{4}{3}x_4^2$	$3x_3x_6 - \frac{2}{3}x_4x_5$
$6x_6$	$-\frac{1}{3}x_2x_5$	$4x_2x_6 - \frac{1}{2}x_3x_5$	$3x_3x_6 - \frac{2}{3}x_4x_5$	$2x_4x_6 - \frac{5}{6}x_5^2$

$$[X_1, X_2] = X_3 - x_2X_1 + x_3X_0$$

$$[X_1, X_3] = 2X_4 + \frac{-2}{3}x_2X_2 + \frac{2}{3}x_4X_0$$

$$[X_1, X_4] = -\frac{1}{3}x_2X_3 + \frac{1}{3}x_5X_0$$

$$[X_2, X_3] = x_2X_3 - x_3X_2 + x_4X_1 - x_5X_0$$

$$[X_2, X_4] = 2x_2X_4 + \frac{-1}{2}x_3X_3 \quad \frac{1}{2}x_5X_1 - 2x_6X_0$$

$$[X_3, X_4] = x_3X_4 + \frac{-2}{3}x_4X_3 + \frac{2}{3}x_5X_2 - x_6X_1$$

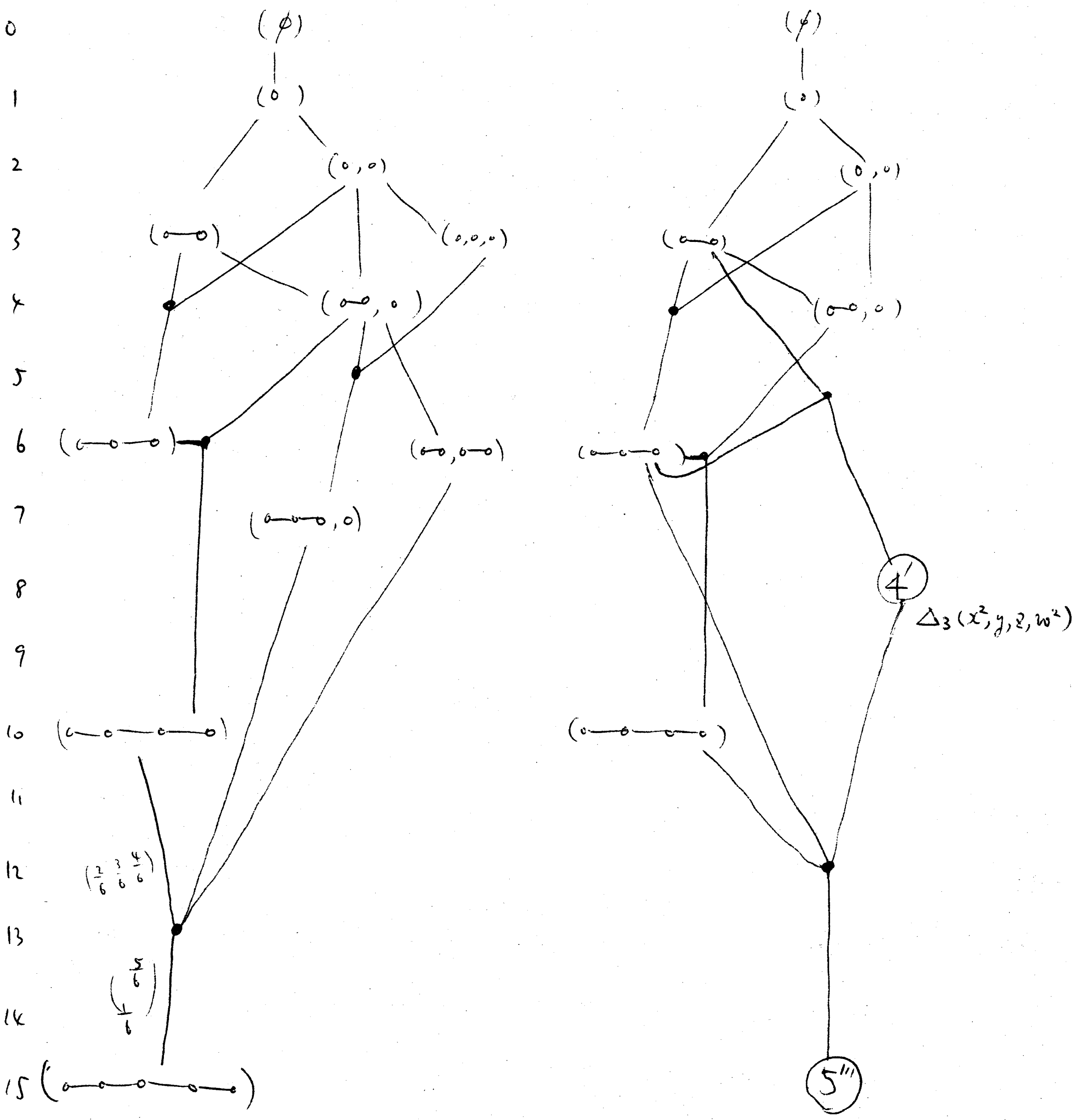
$X_0f = 30f$, $X_1f = 0$, $X_2f = 12x_2f$, $X_3f = 6x_3f$, $X_4f = 2x_4f$

後に、$\mathfrak{gl}(2)$ に由来する、~~simple~~ 我々の求めるものは、この2つしかないことを証明する。

(一般に $X_0f = n(n-1)f$, ---, $X_{n-2}f = 2\cdot 1\, x_{n-2}f$.)

この2つの不変式の holonomy diagram は次の通りである。

6次式 discriminant ⑤'''



6次式のdiscriminantの作用素を $X_0, X_1, \overset{\circ}{X}_2, \overset{\circ}{X}_3, \overset{\circ}{X}_4$

⑤‴ の作用素を $X_0, X_1, X_2', X_3', X_4'$ とし，

$Y_2 = X_2'$, $Y_3 = -4X_3'$, $Y_4 = 6X_4' - \frac{1}{3}x_2X_2'$ と定義する.

$X_\nu = \alpha\overset{\circ}{X}_\nu + Y_\nu$ $\quad \nu = 2.3.4$ とおけば，

$$[X_1, X_2] = X_3 - (\alpha+\tfrac{2}{3})x_2X_1 + \alpha x_3X_0$$

$$[X_1, X_3] = 2X_4 - \tfrac{2}{3}x_2X_2 + 2x_3X_1 + \tfrac{2}{3}(\alpha-2)x_4X_0$$

$$[X_1, X_4] = -\tfrac{1}{3}x_2X_3 + (-2x_4+\tfrac{2}{9}x_2^2)X_1 + (\tfrac{\alpha}{3}+2)x_5X_0 .$$

$$\begin{aligned}[X_2, X_3] &= \alpha^2[\overset{\circ}{X}_2, \overset{\circ}{X}_3] + \alpha\left([\overset{\circ}{X}_2, Y_3] + [Y_2, \overset{\circ}{X}_3]\right) + [Y_2, Y_3] \\ &= \alpha\left\{x_2X_3 - x_3X_2 + \alpha x_4X_1 - \alpha x_5X_0\right\} - \tfrac{2}{3}x_2X_3 - \tfrac{8}{3}x_5X_0 \\ &\quad + \alpha\left\{[\overset{\circ}{X}_2, Y_3] + [Y_2, \overset{\circ}{X}_3] - x_2Y_3 + x_3Y_2 + \tfrac{2}{3}x_2\overset{\circ}{X}_3\right\}\end{aligned}$$

$$[\overset{\circ}{X}_2, Y_3] + [Y_2, \overset{\circ}{X}_3] - x_2Y_3 + x_3Y_2 + \tfrac{2}{3}x_2\overset{\circ}{X}_3 = -\tfrac{136}{3}x_5X_6 + \tfrac{28}{3}x_4X_1 + 10Z$$

$$\begin{aligned}Z = &\left(-\tfrac{80}{3}x_2x_6 + 10x_3x_5 + \tfrac{8}{3}x_4^2 + \cdots\right)D_3 + \left(-33x_3x_6 + \tfrac{70}{3}x_4x_5 + \cdots\right)D_4 \\ &+ \left(-20x_4x_6 + \tfrac{86}{3}x_5^2 + \cdots\right)D_5 + \left(\tfrac{100}{3}x_5x_6 + \cdots\right)D_6\end{aligned}$$

これが $4(\alpha+1)x_4X_1 - 3x_3X_2$, $5(\alpha-4)x_5X_0 - 2x_2X_3$, ……

の結合であらわせなければならないが，Z の $\frac{86}{3}x_5^2D_5 + \frac{100}{3}x_5x_6D_6$ と

$5(\alpha-4)x_5X_0 - 2x_2X_3$ の $5(\alpha-4)\cdot(5x_5^2D_5 + 6x_5x_6D_6)$ をみれば，

それが不可能であることがわかる。よって，$n=6$ のとき，我々の求めるものは discriminant 以外には ⑤″ しか存在しない。

この場合，$\overset{\circ}{X}_2 - \frac{1}{51}[p_4^2]$ のみが適していることになった。

さて, $A_{n+2}(\eta_2,\cdots,\eta_n)$ として, $\overline{p_\ell}\cdot\overline{p_{n-(\ell-2)}}$ $\quad 4\le \ell\le n-2$

をとったとき, Y_2 が x 座標でどの様に表示されるかは,

次の方法で求めるのがよい。

$$Y_2 = \sum_1 \frac{A_{n+2}(\xi_1-\xi_2,\cdots,\xi_1-\xi_n)}{(\xi_1-\xi_2)-(\xi_1-\xi_n)}\frac{\partial}{\partial\xi_1}.$$

$$Y_2 : p_\nu \longmapsto \sum_1 \frac{A_{n+2}(\xi_1-\xi_2,\cdots,\xi_1-\xi_n)}{(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n)} p_{\nu-1}(\xi_2,\cdots,\xi_\nu)$$

$$\begin{aligned} \prod(t-\xi_\nu) &\longmapsto -\sum_1 \frac{(t-\xi_2)\cdots(t-\xi_n)}{(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n)} A_{n+2}(\xi_1-\xi_2,\cdots,\xi_1-\xi_n) \\ \| \\ \sum(-)^\nu p_\nu t^{n-\nu} \\ \| \\ \sum x_\nu t^{n-\nu} &\underset{\mathrm{def}}{\equiv} -\widetilde{A}_{n+2}(t-\xi_1,\cdots,t-\xi_n) \end{aligned} \tag{13}$$

$p_n(t) = \prod(t-\xi_i) = \sum x_\nu t^{n-\nu}$ $\quad p_{n-\nu}(t) = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d}{dt}\right)^\nu p_n(t)$ と定義する.

(esp. $p_1(t) = nt$)

$A_{n+2}(\eta_2,\cdots,\eta_n) = B(\overline{p_1},\cdots,\overline{p_{n-1}})$ であるとせよ。このとき,

$$\widetilde{A}_{n+2}(t-\xi_1,\cdots,t-\xi_n) \underset{\mathrm{def}}{\equiv} B(p_1(t),\cdots,p_{n-1}(t)) \mod p_n(t) \tag{14}$$

として t の 高さ $n-1$ 次式 を定義すれば, (agrange's interpolation formula より, $\widetilde{A}_{n+2}$ は (13) の定義に一致.

従って, この $\widetilde{A}_{n+2}(t-\xi)$ を展開し, $\sum_{\nu\ge1} b_\nu t^{n-\nu}$ となったとすれば,

$$-Y_2 = \sum b_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

である。　　　 $\ell=2$ の場合は, 次の様にすればよい。

$$p_{\nu+2}(t)p_{n-\nu}(t) = \binom{n}{\nu+2}\binom{n}{\nu}\left(t^2+\frac{2}{n}x_1t+\left(-2\frac{\nu n-(\nu+1)^2}{n(n-1)}x_2+\frac{\nu(n-\nu-2)}{n^2}x_1^2\right)\right)\cdot p_n(t)$$

$$+ (t \text{ の 高さ } n-1 \text{ 次})$$

b_ν は, $b_{n-\mu} = \dfrac{(-X_{-1})^{\mu}}{\mu!} b_n$ により定まることを注意しておく*. しかし実際に Lie 環を構成するには, $x_1 = 0$ とおくので, この式で b_ν を定めるよりは, (14) をさらに mod $\mathbb{C}[x]p_{n-1}(t)$ により t の高さ $n-2$ 次式にするのがよい。

一般の Y_ν には, (6) と (11) により定まる。

$$N = (\eta_2^2 D_2 + \cdots + \eta_n^2 D_n) - \sum_2^n \eta_\nu$$

$$= \bar{p}_1 \left(\bar{p}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \cdots + \bar{p}_{n-1}\frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-1}} - 1\right) - \left(2\bar{p}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \cdots + (n-1)\bar{p}_{n-1}\frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-2}}\right)$$

$$\tilde{A}_{n+3}(t) \equiv \left[(4\eta_1 - N) A_{n+2}(\bar{p})\right]_{\eta_1 = t,\ \bar{p}_\nu = p_\nu(t)} \mod \mathbb{C}[x,t]p_n(t) + \mathbb{C}[x]p_{n-1}(t),$$

$$\tilde{A}_{n+4}(t) \equiv \frac{1}{2}\left[(20\eta_1^2 - 10\eta_1 N + N^2) A_{n+2}(\bar{p})\right]_{\eta_1 = t,\ \bar{p}_\nu = p_\nu(t)} \qquad 〃$$

etc.

尚, $(-\mathring{X}_\nu)$ は, $t^{\nu+1} p_{n-1}(t)$ mod 〃 として求められる。いずれも $x_1 = 0$ とおく. (e.g. $\bar{p}_1 = nt$)

特に, $A_{n+2}(\bar{p})$ が $\bar{p}$ の斉 h 次式であれば,

$$\tilde{A}_{n+3}(t) \equiv \left[\left\{-(n(h-1)-4)t + \left(2\bar{p}_2\frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \cdots + (n-1)\bar{p}_{n-1}\frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-2}}\right)\right\} A_{n+2}(\bar{p})\right]_{\bar{p}_\nu = p_\nu(t)}$$

$$\mod \mathbb{C}[x,t]p_n(t) + \mathbb{C}[x]p_{n-1}(t), \quad x_1 = 0.$$

* $b_n = \tilde{A}_{n+2}(-\xi)$. 例えば 非5 の場合,

$$b_\nu = x_{n-\nu}x_{\nu+2} + \binom{n}{\nu+2}\binom{n}{\nu}\left(-2\frac{n-(\nu+1)^2}{n(n-1)}x_2 + \frac{\nu(n-\nu-2)}{n^2}x_1^2\right)x_n.$$

$x_1=0$ とした, A_{n-1}型のLie環 (cf. p.) においては,

交換関係 $[X_1, \mathring{X}_\nu] = (\nu-1)\mathring{X}_{\nu+1} - \frac{2(n-\nu-1)}{n} x_2 \mathring{X}_{\nu-1} + \frac{2(n-\nu-1)}{n} x_{\nu+1} X_0$. (15)*

が成立する。我々は、これにあわせて, $Y_3, \cdots$ を定める.

又, X_1, X_0 は共通にとる故, 次式をもって Y_ν を定義する。 (16)

$$Y_{\nu+1} \equiv \frac{1}{\nu-1}\left\{[X_1, X_\nu] + \frac{2(n-\nu-1)}{n}x_2 Y_{\nu-1}\right\} \mod X_1, X_0.$$

$2 \le \nu \le n-2$. そのように定義すれば, (15)で $X_{n-1}=0$ であるのに応じて, $Y_{n-1} \equiv 0$ となる。

そこで, $\boxed{X_\nu = \alpha \mathring{X}_\nu + Y_\nu}$ $(\nu \ge 2)$ とおき, $(X_0, X_1, \cdots, X_{n-2})$ がLie環をなす必要条件として, $[X_2, X_3]$ が $X_0, X_1, \cdots, X_5$ により表されうる条件を求めよう. (α は scalar)

$$\begin{aligned}[X_2, X_3] &= \alpha^2[\mathring{X}_2, \mathring{X}_3] + \alpha\{[\mathring{X}_2, Y_3] + [Y_2, \mathring{X}_3]\} + [Y_2, Y_3] \\ &= \alpha\left\{X_5 + x_2X_3 - \frac{3(n-4)}{n}x_3X_2 + \frac{3(n-4)}{n}\alpha x_4X_1 - \alpha x_5X_0\right\} \\ &\quad + \alpha\left\{[\mathring{X}_2, Y_3] + [Y_2, \mathring{X}_3] - Y_5 - x_2Y_3 + \frac{3(n-4)}{n}x_3Y_2\right\} + [Y_2, Y_3]. \\ &\equiv \alpha X + \alpha Y + [Y_2, Y_3].\end{aligned}$$

$\alpha Y + [Y_2, Y_3]$ が表示できねばならない。これの D_2 の係数は

x_7, x_2x_5, x_3x_4, $x_2^2x_3$

の一次結合である。これを, X_5, x_5X_0, x_4X_1, $x_2x_3X_0$ or $x_2^2X_1$

を用いて消去する。次に D_3 の係数を消去するには,

$x_2(3x_3X_0 - 2x_2X_1)$, $Ax_4X_1 - 3x_3X_2$, $Bx_5X_0 - 2x_2X_3$

* 同様に $[\mathring{X}_2, \mathring{X}_\nu]$

$$= (\nu-2)\mathring{X}_{\nu+2} + (\nu-2)x_{\nu+2}\mathring{X}_\nu - (\nu-2)x_{\nu+2}X_0 - \frac{3(n-\nu-1)}{n}x_3\mathring{X}_{\nu-1} + \frac{3(n-\nu-1)}{n}x_{\nu+1}X_1$$

の一次結合で消去せねばならない。ここで，$A = 4\alpha + a_2$

$B = 5\alpha + a_3$，　$Y_\nu = a_\nu x_{\nu+2} D_2 + (b_\nu x_{\nu+3} + \cdots) D_3 + \cdots$ $(2 \leq \nu \leq 5)$ ととった。

（Y_ν は，X_0，X_1 を用いて，つねにこの形であると仮定してよい。Y_6 は，一般に x_4^2 が D_2 の係数にあらわれる。）

この3つの作用素は，D_i の係数がすべて2次以上である。

従って，

C1.　係数で一次式のものは，その係数比が X_5 のそれと同じでなければならない。　（$n-7$ 個の条件式）

以下 D_i の係数を mod（3次）で考察する。$\alpha Y + [Y_1, Y_3]$ の D_2 の係数を消去したとき，次の形になっていたとせよ。

$$(C_{26} x_2 x_6 + C_{35} x_3 x_5 + C_{44} x_4^2 + \cdots) D_3 + \cdots$$

$$+ (C_{4n} x_4 x_n + C_{5,n-1} x_5 x_{n-1} + \cdots) D_{n-1} + (C_{5n} x_5 x_n + \cdots) D_n \text{。}$$

$$A x_4 X_1 - 3 x_3 X_2 = (-3(5\alpha + b_2) x_3 x_5 + 4A x_4^2) D_3 + \cdots + nA x_4 x_n D_{n-1} + 0 \cdot D_n$$

$$B x_5 X_0 - 2 x_2 X_3 = (-2(6\alpha + b_3) x_2 x_6 + 3B x_3 x_5) D_3 + \cdots + (n-1) B x_5 x_{n-1} D_{n-1} + nB x_5 x_n D_n$$

の2つにより，これら2次式は消去されねばならない。従って，

C2.　$C_{6,n-2} = C_{7,n-3} = \cdots = C_{ij} = \cdots = 0$　$(i \leq j)$　（$n-5$ 個の条件式）

$C_{6,n-1} = C_{7,n-2} = \cdots = 0$　（〃）

C3.　$C_{44} : C_{4n} = 4 : n$　（2個 ——　）

$C_{5\,n-1} : C_{5,n} = n-1 : n$.

//

以上の方針により, $n=7, 8$ のときに, 新しいLie環が存在するかどうかを調べる。

Micro calculator, Hewlett-Packard Model 65 を用いた計算により, それらの不存在が示される。それについての詳細は, 別の機会にのべることとする。